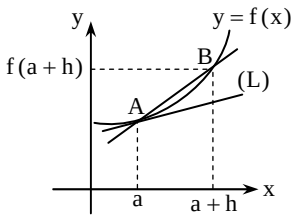
WWW.RIAZISARA.IR

مشتق

۴-۱: مفاهیم اولیه‌ی مشتق



در شکل مقابل در نقطه‌ی $A(a, f(a))$ روی نمودار تابع $y = f(x)$، خط L را بر نمودار مماس کرده‌ایم. نقطه‌ی B را نیز با مختصات $(a+h, f(a+h))$ روی نمودار در نظر گرفته‌ایم (در شکل، $h > 0$)، و اگر $h < 0$، آن‌گاه B سمت چپ A قرار می‌گیرد). شیب پاره‌خط AB برابر است با: $\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}$، و واضح است وقتی که $h \to 0$، با نزدیک شدن نقطه‌ی B به نقطه‌ی A، خط AB نیز به خط L نزدیک می‌شود. بنابراین حد کسر بالا همان شیب خط L خواهد شد. به حد کسر فوق، که برابر شیب خط مماس است، مشتق تابع f در نقطه‌ی $x = a$ می‌گویند.

تعریف: فرض کنید تابع f در یک همسایگی نقطه‌ی $x = a$ تعریف شده باشد. اگر حد زیر وجود داشته باشد، می‌گوییم f در $x = a$ مشتق‌پذیر است و مقدار حد را «مشتق تابع f در $x = a$» می‌نامیم.

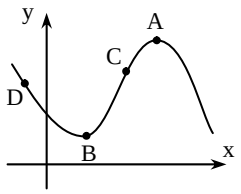
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

➢ **تذکّر (۱):** اگر قرار دهید $x = a + h$، وقتی $h \to 0$، داریم: $x \to a$ و می‌توانیم حد بالا را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

➢ **تذکّر (۲):** شیب خط مماس بر نمودار تابع، در نقطه‌ی $A(a, f(a))$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ برابر $f'(a)$ است. در حالتی که $f'(a) = \infty$، با وجود آن‌که $f'(a)$ وجود ندارد (زیرا عددی حقیقی نیست)، خط مماس وجود دارد و خطی عمودی (موازی محور y ها) است.

تست (۱): در کدام نقطه واقع بر منحنی روبه‌رو، مقدار مشتق بیش‌تر است؟
(منحنی مربوط به یک تابع مشتق‌پذیر در R است.)



۱) A ۲) B
۳) C ۴) D

حل: در نقاط A و B خط مماس بر منحنی تقریباً افقی و مقدار مشتق برابر صفر است. در نقطه‌ی D، شیب خط مماس عددی منفی و در نقطه‌ی C، شیب خط مماس عددی مثبت است. پس در نقطه‌ی C، مقدار مشتق تابع بزرگ‌تر است. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

◈ مشتق‌های یک‌طرفه:

برای وجود داشتن حد در یک نقطه، باید حدهای چپ و راست در آن نقطه موجود و برابر باشند. به این ترتیب می‌توانیم مشتق‌های چپ و راست را تعریف کنیم:

تعریف مشتق چپ و راست:

اگر تابع f در بازه‌ی $(b, a]$ تعریف شده باشد، مقدار حد زیر را (در صورت وجود)، مشتق چپ تابع f در $x = a$ می‌نامیم:

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{یا} \quad f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به‌همین ترتیب برای تابع f که در بازه‌ی $[a, c)$ معین است، مشتق راست f در $x = a$ تعریف می‌شود:

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{یا} \quad f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

نتیجه: تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر است، اگر و تنها اگر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود و برابر باشند.

با استفاده از تعریف مشتق، می‌توانیم مشتق توابع مختلف را به‌دست آوریم، ولی در بسیاری از موارد، این کار طولانی و طاقت‌فرسا است. به‌همین دلیل فرمول‌هایی برای مشتق‌گیری توابع وجود دارد که کمی جلوتر به آن‌ها اشاره خواهیم کرد. البته در مسائلی خاص استفاده از تعریف مشتق برای مشتق‌گیری ساده‌تر است که چند نمونه از آن‌ها را مشاهده می‌کنید:

تست (۲): اختلاف بین مشتق چپ و راست تابع $f(x)=\begin{cases} x\tan^{-1}(\frac{1}{x}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ **در نقطه‌ی** $x=0$ **کدام است؟**

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{4\pi}{3}$ ۴) $\frac{3\pi}{4}$

حل: اولاً چون $0=$ کران‌دار × صفر $=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $f(0)=0$، تابع f در $x=0$ پیوسته است. حال داریم:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\tan^{-1}(\frac{1}{x})=\lim_{t\to +\infty}\tan^{-1}(t)=\frac{\pi}{2}$$

به‌همین ترتیب $f'_-(0)=-\frac{\pi}{2}$ و اختلاف دو مشتق $\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$ می‌شود. بنابراین گزینه‌ی ۱ درست است.

در توابع شامل جزء صحیح یا قدر مطلق، بهتر است ابتدا با نامساوی‌ها در همسایگی مورد نظر جزء صحیح و قدر مطلق را حذف کنیم.

تست (۳): اگر $f(x)=(x-2)[3x-2]$، **حاصل** $f'_-(2)-f'_+(2)$ **کدام است؟**

۱) **صفر** ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -1

حل: چون $f(2)=0$ داریم:

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)[3x-2]}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}[3x-2]=[4^+]=4$$

به‌همین ترتیب به‌دست می‌آوریم: $f'_-(2)=\lim\limits_{x\to 2^-}[3x-2]=[4^-]=3$، بنابراین $f'_-(2)-f'_+(2)=-1$ و گزینه‌ی ۴ درست است.

تست (۴): برای تابع $f(x)=|x|\sqrt{2+x}$ **در** $x=0$، **کدام گزینه درست است؟**

۱) مشتق چپ و راست موجود و برابر **۲) مشتق چپ و راست موجود و نابرابر**

۳) مشتق چپ و راست وجود ندارد. **۴) مشتق راست موجود است، ولی مشتق چپ وجود ندارد.**

حل: در همسایگی راست و چپ $x=0$ جداگانه ضابطه‌ی تابع و حدهای متناظر را می‌نویسیم:

$$x\to 0^+: f(x)=x\sqrt{2+x}\Rightarrow f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{2+x}=\sqrt{2}$$

$$x\to 0^-: f(x)=-x\sqrt{2+x}\Rightarrow f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}(-\sqrt{2+x})=-\sqrt{2}$$

بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

تست (۵): اگر $f(x)=|x^2-4|[-x^3]$، **حاصل** $f'_+(2)-f'_-(2)$ **کدام است؟**

۱) ۴ ۲) -4 ۳) ۶۸ ۴) -68

حل: ابتدا در همسایگی کوچک راست و چپ $x=2$ ضابطه‌ی تابع را بدون جزء صحیح و قدر مطلق می‌نویسیم:

$$x\to 2^+: x>2\Rightarrow x^2>4\ ,\ -x^3<-8\Rightarrow f(x)=(x^2-4)[(-8)^-]=-9(x^2-4)$$

$$x\to 2^-: x<2\Rightarrow x^2<4\ ,\ -x^3>-8\Rightarrow f(x)=(4-x^2)[(-8)^+]=-8(4-x^2)$$

حال مثلاً برای محاسبه‌ی $f'_+(2)$ داریم:

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-9(x^2-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}-9(x+2)=-36$$

به‌همین ترتیب نتیجه می‌گیریم: $f'_-(2)=\lim\limits_{x\to 2^-}8(x+2)=32$، بنابراین: $f'_+(2)-f'_-(2)=-68$ و گزینه‌ی ۴ درست است.

مسأله‌ی (۱): الف) اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{kh}$ را بیابید (m,n,k اعداد حقیقی ثابت هستند).

ب) اگر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود باشند، حاصل $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}$ را بیابید.

حل: الف) با اضافه و کم کردن $f(a)$ در صورت کسر داریم:

$$\text{جواب}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a)}{kh}-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+nh)-f(a)}{kh}$$

حال مثلاً حد کسر اول را به‌صورت زیر می‌توانیم برحسب $f'(a)$ بیان کنیم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a)}{kh}=\frac{m}{k}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a)}{mh}\xrightarrow{t=mh}\frac{m}{k}\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}=\frac{m}{k}f'(a)$$

به‌همین ترتیب کسر دوم برابر $\frac{n}{k}f'(a)$ می‌شود و جواب نهایی برابر است با: $\frac{(m-n)f'(a)}{k}$.

ب) اگر قرار دهیم $t=2h$ و $k=-3h$، آن‌گاه داریم: $t\to 0^+$ و $k\to 0^-$ (وقتی $h\to 0^+$)، و می‌توانیم کسر را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\text{جواب}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a-3h)-f(a)}{h}=2\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}+3\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}$$

$$=2\lim_{t\to 0^+}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}+3\lim_{k\to 0^-}\frac{f(a+k)-f(a)}{k}=2f'_+(a)+3f'_-(a)$$

نتیجه‌ی قسمت (الف) نکته‌ی مفیدی است که گاه در حل تست‌ها مفید واقع می‌شود:

نکته: **اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، و m، n و k سه عدد حقیقی باشند، داریم:**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{kh}=\frac{m-n}{k}f'(a)$$

تست (۶): حد کدام‌یک از کسرهای زیر وقتی $\Delta x\to 0$، برابر $f'(x)$ است؟

۱) $\frac{f(x+2\Delta x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}$

۲) $\frac{f(x)-f(x+\Delta x)}{\Delta x}$

۳) $\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}$

۴) $\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$

حل: در گزینه‌ی (۱) طبق نکته‌ی قبل داریم:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+2\Delta x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}=\frac{2-(-1)}{1}f'(x)=3f'(x)$$

دقت کنید که تغییر نام h به Δx تفاوتی در حد ایجاد نمی‌کند. به‌همین ترتیب حاصل حدهای گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ به‌ترتیب $-f'(x)$، $2f'(x)$ و $f'(x)$ می‌شود. بنابراین پاسخ تست گزینه‌ی ۴ است.

مسأله‌ی (۲): اگر $f(x)=\begin{cases}x^2+3x & x\ge 1\\ x^2-3x+6 & x<1\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h^2)-f(1-2h^2)}{3h^2}$ را به‌دست آورید.

حل: با اضافه و کم کردن $f(1)$ در صورت کسر می‌توانیم حاصل کسر را برحسب مشتق‌های چپ و راست f بنویسیم:

$$\text{جواب}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h^2)-f(1)}{3h^2}-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h^2)-f(1)}{3h^2}=\frac{1}{3}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h^2)-f(1)}{h^2}+\frac{2}{3}\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h^2)-f(1)}{-2h^2}$$

اگر قرار دهیم $t=h^2$ و $k=-2h^2$، وقتی $h\to 0$ داریم: $t\to 0^+$ و $k\to 0^-$ و حاصل حد اول $f'_+(1)$ و حاصل حد دوم $f'_-(1)$ می‌شود. بنابراین جواب نهایی برابر $\frac{1}{3}f'_+(1)+\frac{2}{3}f'_-(1)$ می‌شود. برای محاسبه‌ی مشتق‌ها با توجه به پیوستگی تابع f در $x=1$ می‌توانیم از دو ضابطه مشتق بگیریم، که از فرمول‌های مشتق‌گیری می‌دانیم:

$$f'(x)=\begin{cases}2x+3 & x>1\\ 2x-3 & x<1\end{cases}\Rightarrow f'_+(1)=5\ ,\ f'_-(1)=-1\Rightarrow \text{جواب}=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=1$$

مشتق‌پذیری و مشتق‌ناپذیری:

دیدیم که تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر است، اگر حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ موجود باشد. حال می‌خواهیم کمی دقیق‌تر نقاطی را بررسی کنیم که در آن‌ها این حد وجود ندارد، یا به عبارت دیگر نقاط مشتق‌ناپذیری یک تابع را. ابتدا به قضیه‌ی زیر دقت کنید.

قضیه: **اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه در $x=a$ پیوسته است.**
به عبارت دیگر: اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x=a$ نیز مشتق‌پذیر نیست.

تذکّر: دقت کنید که عکس قضیه‌ی بالا درست نیست. مثلاً تابع $f(x)=|x|$ در $x=0$ پیوسته است، ولی مشتق‌پذیر نیست (زیرا $f'_+(0)=1$ و $f'_-(0)=-1$).

نتیجه: از قضیه‌ی بالا نتیجه می‌گیریم که برای پیدا کردن نقاط مشتق‌ناپذیری یک تابع باید:

۱- نقاط ناپیوستگی را پیدا کنیم. همه‌ی این نقاط، نقاط مشتق‌ناپذیری هم هستند.

۲- نقاطی که در آن‌ها تابع پیوسته است، ولی یکی از مقادیر $f'_-(a)$ و $f'_+(a)$ موجود نباشند، نقاط مشتق‌ناپذیری‌اند. همین‌طور نقاطی که در آن‌ها $f'_+(a)\neq f'_-(a)$.

برای این‌که بفهمیم چه نقاطی را باید در شرط دوم بررسی کنیم، در ادامه نکاتی را بیان خواهیم کرد.

تست (۷): **اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ x^2+1 & x<0\end{cases}$، آن‌گاه در $x=0$ کدام گزینه درست است؟**

۱) مشتق راست وجود دارد، ولی چپ وجود ندارد. **۲) مشتق چپ وجود دارد، ولی راست وجود ندارد.**
۳) مشتق چپ و راست وجود ندارد. **۴) مشتق‌پذیر است.**

حل: اولاً با توجه به ضابطه تابع در $x=0$ از چپ ناپیوسته و بنابراین مشتق‌ناپذیر است. ولی مشتق راست نیز ندارد، زیرا:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

بنابراین گزینه‌ی ۳ درست است.

تست (۸): **کدام تابع در $x=0$ پیوسته است، ولی مشتق‌پذیر نیست؟**

۱) $f(x)=x^2[x]$ **۲)** $f(x)=x|x|$

۳) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ **۴)** $f(x)=|x|[x]$

حل: توابع گزینه‌های (۱) و (۴) به دلیل عامل‌های صفر کننده‌ی x^2 و $|x|$ در $x=0$ پیوسته‌اند. تابع گزینه‌ی (۲) به وضوح در $x=0$ پیوسته است و برای تابع گزینه‌ی (۳) داریم: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ صفر × کران‌دار $=0$، پس در $x=0$ پیوسته است. تابع گزینه‌ی (۴) در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا:

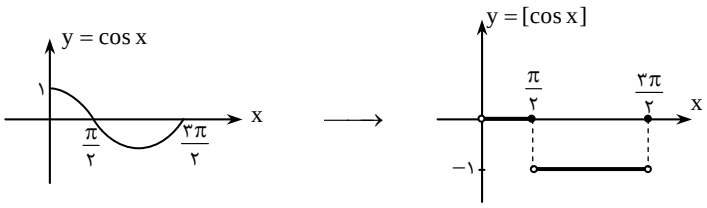
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}[x]\Rightarrow\begin{cases}f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}[x]=0\\ f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}[x]=1\end{cases}$$

به‌همین ترتیب ثابت می‌شود توابع گزینه‌های دیگر در $x=0$ مشتق‌پذیر هستند. بنابراین گزینه‌ی ۴ پاسخ تست است.

تست (۹): کدام گزینه برای تابع $f(x)=[\cos x]$ در $x=\frac{\pi}{۲}$ درست است؟

۱) مشتق راست دارد، ولی مشتق چپ ندارد.
۲) مشتق چپ دارد، ولی مشتق راست ندارد.
۳) نه مشتق راست دارد و نه مشتق چپ.
٤) مشتق‌پذیر است.

حل: نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۲}$، تابع از چپ پیوسته است و مشتق چپ آن نیز صفر است.
بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

مسأله‌ی (۳): در توابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x\ge ۰ \\ x^۳+۱ & x<۰ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x\ge ۰ \\ x^۳ & x<۰ \end{cases}$، مقادیر مشتق چپ و راست را در $x=۰$ به‌دست آورید.

حل: در هر دو تابع بدون در نظر گرفتن نقطه‌ی $x=۰$ می‌توانیم از ضابطه‌ها مشتق بگیریم:

$$f'(x)=\begin{cases} ۲x & x>۰ \\ ۳x^۲ & x<۰ \end{cases} \quad , \quad g'(x)=\begin{cases} ۲x & x>۰ \\ ۳x^۲ & x<۰ \end{cases}$$

دقت کنید که در ضابطه‌ی مشتق، شرط $x\ge ۰$ در ضابطه‌ی اول توابع، به $x>۰$ تغییر پیدا کرده است. ولی در نقطه‌ی مرزی $x=۰$ چه وضعیتی برقرار است؟ در تابع f داریم:

$$f(۰)=۱ \Rightarrow f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)-۱}{x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲}{x}=۰$$

به همین ترتیب به‌دست می‌آوریم: $f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^۳}{x}=۰$، در نتیجه: $f'_+(۰)=f'_-(۰)=۰$، یا به بیان دیگر $f'(۰)=۰$.

در تابع g نیز با توجه به $g(۰)=۱$، برای محاسبه‌ی $g'_+(۰)$ از همان روابط $f'_+(۰)$ استفاده می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم: $g'_+(۰)=۰$، ولی برای $g'_-(۰)$ داریم:

$$g'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{g(x)-g(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^۳-۱}{x}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

پس $g'_-(۰)$ وجود ندارد!

در مسأله‌ی (۳) اگر دقت کنید متوجه می‌شوید که برای محاسبه‌ی $f'_+(۰)$ و $f'_-(۰)$ می‌توانستیم از همان دو ضابطه‌ی $f'(x)$ استفاده کنیم (از حدهای $\lim_{x\to ۰^+}۲x$ و $\lim_{x\to ۰^-}۳x^۲$). ولی در محاسبه‌ی $g'_-(۰)$ نمی‌توانیم از $\lim_{x\to ۰^-}۳x^۲$ (در ضابطه‌ی دوم $g'(x)$) استفاده کنیم. دقت در صورت سؤال نشان می‌دهد که f در $x=۰$ پیوسته و g فقط از راست پیوسته است، به‌همین دلیل در محاسبه‌ی $f'(۰)$ و $g'_+(۰)$ می‌توانستیم از ضابطه‌های f' و g' استفاده کنیم.

نکته: **در تابع دو ضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\ge a \\ h(x) & x<a \end{cases}$ به شرط پیوستگی f در $x=a$، می‌توانیم برای محاسبه‌ی $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ از حد مشتق ضابطه‌ها وقتی $x\to a$ استفاده کنیم.**

➢ **تذکّر:** پیوستگی راست f در $x=a$ برای $f'_+(a)$ و پیوستگی چپ آن برای $f'_-(a)$ کافی است.

تست (۱۰): در تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲-۲x & x\ge ۱ \\ ax+b & x<۱ \end{cases}$، اگر $f'(۱)$ موجود باشد، b کدام است؟

۱) -۲ **۲)** -۱ **۳) صفر** **٤)** ۱

حل: از پیوستگی f در $x=۱$ نتیجه می‌گیریم: $۱-۲=a+b \Rightarrow a+b=-۱$، حال با فرض پیوستگی داریم:

$$f'(x)=\begin{cases} ۲x-۲ & x>۱ \\ a & x<۱ \end{cases} \xrightarrow{f'_+(۱)=f'_-(۱)} ۲\times ۱-۲=a \Rightarrow a=۰ \xrightarrow{a+b=-۱} b=-۱$$

بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

دیدیم که نقاط ناپیوستگی اولین دسته‌ی نقاط مشتق‌ناپذیری یک تابع هستند. حال به بررسی نقاط دیگر می‌پردازیم.
ابتدا به قضیه‌ی زیر که معادل آن را در بخش حد و پیوستگی نیز بیان کرده‌ایم، دقت کنید:

قضیه: **۱- اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه $f \pm g$، fg و $\frac{f}{g}$ (به شرط $g(a) \neq 0$) نیز در $x=a$ مشتق‌پذیر خواهند بود.**
۲- اگر f در $x=a$ مشتق‌پذیر و g در $x=f(a)$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه تابع gof نیز در $x=a$ مشتق‌پذیر است.

با استفاده از این قضیه نتیجه می‌گیریم توابع چند جمله‌ای، توابع گویا (یعنی $\frac{P(x)}{Q(x)}$ که P و Q دو چند جمله‌ای‌اند)، توابع مثلثاتی و جمع، تفریق، ضرب و تقسیم چنین توابعی در دامنه‌ی خود مشتق‌پذیرند. معمولاً نقاط مشتق‌ناپذیری در سه دسته از توابع ظاهر می شوند، ۱- توابع اصم، ۲- توابع شامل قدر مطلق و ۳- توابع شامل جزء صحیح.

نکته: **مشتق‌ناپذیری در توابع اصم**
۱- تابع $f(x)=\sqrt[n]{x}$ ($n \in N$ ، $n \geq 2$) برای n های فرد تنها در نقطه‌ی $x=0$ مشتق‌ناپذیر است و برای n های زوج، نقاط $x<0$ نیز از دامنه‌ی آن حذف می‌شوند.
۲- تابع $g(x)=\sqrt[n]{f(x)}$ که در آن f یک چند جمله‌ای است، تنها ممکن است در ریشه‌های f مشتق‌ناپذیر باشد. البته برای n های زوج باید محدوده‌ی دامنه نیز در نظر گرفته شود. به بیان دقیق‌تر، اگر $x=a$ ریشه‌ی ساده یا مکرر f از مرتبه‌ی تکرار m باشد، و $m<n$، تابع g در $x=a$ مشتق‌ناپذیر است.

➢ **تذکّر:** $x=a$ ریشه‌ی مکرر f از مرتبه‌ی تکرار m است، اگر $f(x)=(x-a)^m h(x)$ که $x=a$ ریشه‌ی h نیست. برای مثال در $f(x)=x(x-1)^2(x+1)^3$، عدد $x=0$ ریشه‌ی ساده‌ی f است، ولی $x=1$ و $x=-1$ ریشه‌های مکرر f از مرتبه‌ی تکرار ۲ و ۳ هستند.

مثال: تابع $g(x)=\sqrt[3]{x^4(x-1)^2(x+2)}$ در نقاط $x=1$ و $x=-2$ مشتق‌ناپذیر است. ولی در $x=0$ با آن‌که ریشه‌ی عبارت زیر رادیکال است، مشتق‌پذیر می‌باشد، زیرا درجه‌ی تکرار $x=0$ از مرتبه‌ی ۴ است و $4>3$. ولی درجه‌ی تکرار ۲ ریشه‌ی دیگر، ۲ و ۱ است که هر دو از ۳ کم‌ترند. مثلاً برای $x=1$ داریم:

$$g'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{x^4(x-1)^2(x+2)}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{x^4(x+2)}}{\sqrt[3]{x-1}}=\frac{\sqrt[3]{3}}{0^+}=+\infty \rightarrow g'_+(1) \text{ وجود ندارد}$$

نکته: **مشتق‌ناپذیری در توابع شامل قدر مطلق**
اگر $f(x)=|g(x)|$ و تابع g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، f در صورتی در $x=a$ مشتق‌ناپذیر است که $x=a$ ریشه‌ی ساده‌ی g باشد.

➢ **تذکّر:** برای آن‌که $x=a$ ریشه‌ی ساده‌ی g باشد، باید $g(a)=0$، ولی $g'(a)\neq 0$.

➢ **تذکّر:** در حالت خاصی که g چند جمله‌ای باشد، باید $g(x)=(x-a)h(x)$ طوری‌که $h(a)\neq 0$.

مثال: تابع $f(x)=|x^4(x-1)^3(x+2)|$ تنها در نقطه‌ی $x=-2$ مشتق‌ناپذیر است، زیرا ریشه‌ی ساده‌ی عبارت داخل قدر مطلق است. ریشه‌های $x=0$ و $x=1$ چون ریشه‌های مکرر از درجه‌ی تکرار بیش‌تر از ۱ هستند، نقاط مشتق‌ناپذیری را مشخص نمی‌کنند.

مسأله‌ی (۴): نقاط مشتق‌ناپذیری تابع $f(x)=\begin{cases}|(x+1)(x-2)^2| & |x|\leq 3\\ \dfrac{\sqrt[3]{(x^2-16)(x+3)^2}}{(x+7)} & |x|>3\end{cases}$ **را به‌دست آورید.**

حل: ضابطه‌ی اول در نقطه‌ی $x=-1$ مشتق‌ناپذیر است (ریشه‌ی ساده‌ی عبارت داخل قدر مطلق) که در محدوده‌ی ضابطه (یعنی $|x|\leq 3$) قرار دارد. ضابطه‌ی دوم در نقاط $x=\pm 4$ مشتق‌ناپذیر است که نقاط $x=\pm 4$ در محدوده‌ی ضابطه قرار دارند. تنها باید نقاط مرزی $x=\pm 3$ را بررسی کنیم که به‌وضوح تابع در این نقاط ناپیوسته است. بنابراین طول نقاط مشتق‌ناپذیری تابع f عبارت‌اند از:

$\{4,3,-1,-3,-4\}$

تذکّر: همانند بحث پیوستگی، مشتق‌پذیری و مشتق‌ناپذیری فقط در نقاط دامنه‌ی تابع مطرح می‌شود. مثلاً در این مسأله نقطه‌ی $x=-۷$ را نباید جزء نقاط مشتق‌ناپذیری محسوب کنیم، چون اصلاً در دامنه‌ی تابع نیست.

تست (۱۱): اگر تابع $f(x)=(۲x^۲+ax+b)|(x-۱)(x-۲)|$ در R مشتق‌پذیر باشد، a کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۶ ۴) -۶

حل: طبق نکته‌ی قبل، باید $x=۱$ و $x=۲$ ریشه‌ی ساده‌ی عبارت نباشند، در نتیجه باید هر دو ریشه‌های $۲x^۲+ax+b$ باشند. یعنی این عبارت به‌صورت $۲(x-۱)(x-۲)$ قابل نوشتن است، در نتیجه:

$$۲x^۲+ax+b=۲(x-۱)(x-۲)\Rightarrow ۲x^۲+ax+b=۲x^۲-۶x+۴\Rightarrow a=-۶\ ,\ b=۴$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

نکته:

مشتق‌ناپذیری در توابع شامل جزء صحیح

تابع $y=[f(x)]$ در تمام نقاطی که پیوسته است، مشتق‌پذیر نیز هست (با مشتقی برابر صفر)، و در نقاط دیگر ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

مفهوم نکته‌ی بالا واضح است: در نقاطی که تابع $y=[f(x)]$ پیوسته است، نمودار آن از پاره‌خطی افقی تشکیل شده، بنابراین مشتق‌پذیر (با مشتقی برابر صفر) می‌باشد.

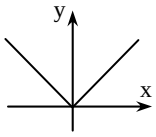
انواع نقاط مشتق‌ناپذیری:

دیدیم که دسته‌ی اول نقاط مشتق‌ناپذیری یک تابع، همان نقاط ناپیوستگی هستند. ولی نقاط دیگر مشتق‌ناپذیری را (یعنی نقاطی که تابع در آن‌ها پیوسته است، ولی مشتق‌پذیر نیست) می‌توانیم به سه دسته‌ی زیر تقسیم کنیم:

۱- نقاط زاویه‌دار: نقاطی که مانند $x=a$ در آن‌ها f پیوسته است و حداقل یکی از دو مقدار $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود است، ولی تابع مشتق‌ناپذیر است.

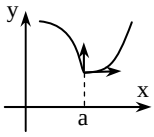
در این نقاط می‌توانیم دو نیم‌مماس از چپ و راست بر نمودار تابع رسم کنیم که با هم یک زاویه تشکیل می‌دهند.

مثال: تابع $f(x)=|x|$ در نقطه‌ی $x=۰$ یک نقطه‌ی زاویه‌دار دارد، زیرا:

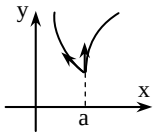


$f'_+(۰)=۱\quad ,\quad f'_-(۰)=-۱$

به دو نمودار مقابل نیز دقت کنید:



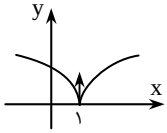
$f'_-(a)=-\infty$
$f'_+(a)=۰$



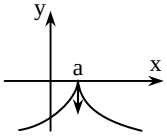
$f'_-(a)=$ عدد حقیقی
$f'_+(a)=+\infty$

۲- نقاط بازگشت: نقاطی مانند $x=a$ که در آن‌ها f پیوسته است و $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ هر دو نامتناهی‌اند، ولی با علامت‌های مختلف (یعنی $f'_+(a)=+\infty$ و $f'_-(a)=-\infty$ یا بر عکس).

مثال: تابع $f(x)=\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}$ در نقطه‌ی $x=۱$ نقطه‌ی بازگشت دارد، زیرا $f'_+(۱)=+\infty$ و $f'_-(۱)=-\infty$. به نمودار تابع دقت کنید:



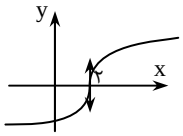
هم‌چنین به نمودار روبه‌رو دقت کنید:



$$\begin{cases} f'_+(a)=-\infty \\ f'_-(a)=+\infty \end{cases}$$

۳- نقاط عطف قائم: نقاطی مانند $x=a$ که در آن‌ها f پیوسته است و $f'_+(a)=f'_-(a)=+\infty$ یا $f'_+(a)=f'_-(a)=-\infty$.

مثال: تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x-۲}$ در نقطه‌ی $x=۲$ عطف قائم دارد. به نمودار تابع دقت کنید. داریم: $f'_+(۲)=+\infty$ و $f'_-(۲)=+\infty$.



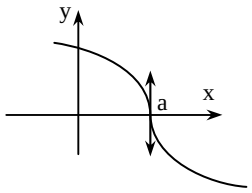
WWW.RIAZISARA.IR

فصل ۴

مفاهیم اولیه‌ی مشتق

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- اگر نمودار تابع f به شکل روبه‌رو باشد، کدام گزینه درست است؟



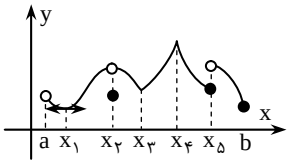
۱) $\begin{cases} f'_+(a) = +\infty \\ f'_-(a) = +\infty \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f'_+(a) = -\infty \\ f'_-(a) = -\infty \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f'_+(a) = +\infty \\ f'_-(a) = -\infty \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f'_+(a) = -\infty \\ f'_-(a) = +\infty \end{cases}$

۲- نمودار تابع روبه‌رو در بازه‌ی (a,b) در چند نقطه از نقاط x_i مشتق‌ناپذیر است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۳- f تابعی فرد است و $f'_+(1) = 2$ و $f'_-(1) = 1$. مقدار $f'_-(-1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

۴- اگر f یک تابع زوج باشد، با فرض $f'_+(1) = 1$ و $f'_-(1) = 2$، مقدار $f'_+(-1)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -1

۵- دو نقطه به طول‌های ۲ و $2+h$ روی منحنی $y = \sqrt{x}$ مفروض‌اند. مقدار حد ضریب زاویه‌ی خط گذرنده بر دو نقطه، وقتی $h \to 0$، کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۴) $2\sqrt{2}$

۶- شیب وتری که دو نقطه به‌طول‌های ۲ و x را از نمودار تابع هموار $y = f(x)$ به‌هم وصل می‌کند، برابر $x^2 + 2x + 4$ است. شیب مماس بر منحنی در نقطه‌ای به‌طول ۲ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۷- در تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & x < -1 \\ |x| & x \geq -1 \end{cases}$، حاصل $f'(-2)$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۳

۸- در تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{2x^2 + x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$، مقدار $f'(0)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) -4 ۴) وجود ندارد.

۹- اگر مشتق چپ تابع $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{ax^2 - x^4}$ در $x = 0$ برابر -1 باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -2 ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

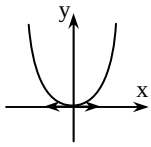
۱۰- اگر مشتق چپ تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{\pi}\tan^{-1}(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 0$ برابر ۲ باشد، مقدار a کدام است؟

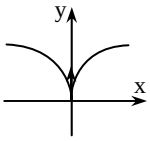
۱) ۴ ۲) -4 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

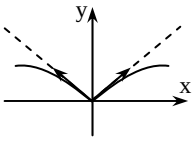
۱۱- مشتق راست تابع $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ در نقطه‌ی $x=0$ کدام است؟

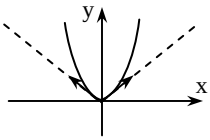
۱) $-\sqrt{2}$ ۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

* ۱۲- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ در همسایگی $x=0$ به کدام شکل است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۳- مقدار مشتق تابع $f(x)=|x\tan^{-1}x|$ در نقطه‌ی $x=0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) -1 ۴) وجود ندارد.

۱۴- اگر $g(x)=[x]\sin x$، مقدار $g'(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

۱) ∞ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۱۵- مشتق تابع $f(x)=x+[\frac{x}{2}]$ در نقطه‌ی $x_0=2k-1$ $(k\in Z)$ کدام است؟

۱) $2k$ ۲) $2k-1$ ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۱۶- در تابع $f(x)=[x]\sin\pi x$، حاصل $f'_+(2)$ کدام است؟

۱) 2π ۲) -2π ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۱۷- در تابع $f(x)=[-x]|x^3-8|$، مجموع مشتق چپ و راست در $x=2$ کدام است؟

۱) -8 ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) -12

۱۸- مشتق چپ تابع $f(x)=x^2[-x^2]+|x^2-1|$ در نقطه‌ی $x_0=-1$ چقدر است؟

۱) موجود نیست. ۲) صفر ۳) ۲ ۴) -2

۱۹- در تابع $f(x)=(x-a)[-x]$، که $a\in N$ یک عدد ثابت است، حاصل $f'_+(a)+f'_-(a)$ کدام است؟

۱) $-2a+1$ ۲) $-2a-1$ ۳) $2a$ ۴) $2a-1$

۲۰- اگر $f(x)=(x^2-2x)([x]+[-x])$، حاصل $f'(2)$ کدام است؟

۱) وجود ندارد. ۲) صفر ۳) -1 ۴) -2

۲۱- مشتق راست تابع $f(x)=[\sin x+\cos x]$ در $x=\frac{3\pi}{4}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۲۲- اگر مشتق راست تابع $f(x)=a|\cos x-\sin x|$ در $x_0=\frac{\pi}{4}$ برابر ۱ باشد، a کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۳- کدام گزینه مشتق تابع $f(x)=\sin 2x$ را در $x=\frac{\pi}{2}$ بیان می‌کند؟

۱) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(\pi+h)}{h}$ ۲) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(\pi+2h)}{h}$ ۳) $\lim\limits_{h\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\pi+h)-\sin h}{h-\frac{\pi}{2}}$ ۴) $\lim\limits_{h\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x-\sin 2h}{h-\frac{\pi}{2}}$

۲۴- اگر تابع f در $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{\sqrt{x}-1}$ کدام است؟

۱) $f'(1)$ ۲) $2f'(1)$ ۳) صفر ۴) $\frac{1}{2}f'(1)$

۲۵- اگر تابع f در $x=۲$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x^۲+۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}f'(۲)$ ۲) $\frac{۱}{۲}f'(۲)$ ۳) $\frac{۱}{۸}f'(۲)$ ۴) صفر

۲۶- اگر برای تابع f داشته باشیم: $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h}=-۲$، مقدار $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(x_۰)-f(x_۰-۲h)}{h}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۲ ۴) -۲

۲۷- اگر برای تابع f داشته باشیم: $\lim\limits_{h\to ۰^+}\frac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h}=۲$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^-}\frac{f(x_۰)-f(x_۰-h)}{h}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲

۳) $۲+f(x_۰)$ ۴) به مشتق‌پذیری یا مشتق‌ناپذیری f در نقطه‌ی $x=x_۰$ بستگی دارد.

۲۸- هرگاه تابع f در $x=x_۰$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}n(f(x_۰+\frac{۱}{n})-f(x_۰-\frac{۱}{n}))$ کدام است؟ $(n\in N)$

۱) $\frac{۱}{۲}f'(x_۰)$ ۲) $f'(x_۰)$ ۳) $۲f'(x_۰)$ ۴) $-f'(x_۰)$

۲۹- اگر برای تابع f داشته باشیم: $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(x+۲h)-f(x-۴h)}{۳h}=\sqrt{۲x}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲-h)}{۳h^۲+۲h}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) ۲

۳۰- اگر $f(x)=\sin(\frac{\pi x}{۴})$، حاصل $\lim\limits_{\Delta x\to ۰}\frac{f(۲-\Delta x)-۱}{\Delta x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{۴}$ ۲) $-\frac{\pi}{۲}$ ۳) صفر ۴) $-\pi$

۳۱- اگر $f(x)=\sqrt{x}$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f^۳(۴+h)-f^۳(۴)}{h}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۹

۳۲- اگر $f(x)=\begin{cases}x^۴+۱ & x\geq ۱\\ x^۲-۱ & x<۱\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^-}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۳۳- در تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-۱} & x\geq ۲\\ x^۲-۳ & x<۲\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^-}\frac{f(۲-h)-۱}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۴ ۴) وجود ندارد.

۳۴- اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{۵}{x}-۳x & x\leq -۱\\ \frac{۵x+۱}{x+۲}+۲ & x>-۱\end{cases}$، در این صورت حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^-}\frac{f(-۱)-f(h-۱)}{h}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) -۸ ۳) ۱۷ ۴) -۱۷

۳۵- اگر $f(x)=\sqrt{x+۴}$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{\Delta x\to ۰}\frac{f(\Delta x)-f(۲\Delta x)}{\Delta x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۳۶- با فرض $f(x)=\begin{cases}3x^2-x & x>2\\ 2x+6 & x\le 2\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(2+3h)-f(2-2h)}{h}$ کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۶- ۴) ۱۷

۳۷- برای تابع $f(x)=|x|$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-2)-f(-2-|h|)}{|h|}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) $-\sqrt{2}$

۳۸- با فرض $f(x)=|x|\sqrt{x+4}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(2h)-f(-3h)}{h}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۰- ۳) ۲ ۴) ۲-

۳۹- اگر $f(x)=\begin{cases}x^2-3x & x\ge 1\\ x^3-3 & x<1\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h^2)-f(1+h^2)}{h^2}$ کدام است؟

۱) ۵- ۲) ۴ ۳) ۷- ۴) ۶

۴۰- اگر تابع f در $x=2$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{xf(2)-2f(x)}{x-2}$ کدام است؟

۱) $f(2)-f'(2)$ ۲) $f(2)-2f'(2)$ ۳) ۱ ۴) صفر

۴۱- حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^2+2(1+h)-3}{h}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴- ۳) ۳ ۴) ۳-

۴۲- عبارت $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x-1}$ برای بیان مشتق چند تابع در $x=1$ می‌تواند به‌کار رود؟

۱) فقط یک تابع ۲) بی‌شمار تابع

۳) هیچ تابع ۴) مربوط به مشتق نیست.

۴۳- مشتق تابع f در نقطه‌ی $x=2$ به‌صورت $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2(2+h)^2+k(2+h)-2k-8}{h}=12$ بیان شده است. مقدار k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۴۴- اگر $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\ge 1\\ x^3 & x\le 1\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(f(1+\frac{1}{n^2})-f(1)\right)$ کدام است؟ $(n\in N)$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۴۵- برای کدام مقدار a و b، تابع $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx & x\ge 2\\ x^2+x+a & x<2\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=2$ از راست مشتق‌پذیر است؟

۱) $a=-b=1$ ۲) $a=b=-1$ ۳) هیچ مقدار a و b ۴) هر مقدار a و b

۴۶- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}ax^2 & x<1\\ bx^3+2x & x\ge 1\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۶- ۲) ۴- ۳) ۶ ۴) ۴

۴۷- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}ax^2-x+b & |x|\le 2\\ |x-2| & |x|>2\end{cases}$ در $x=2$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a+b$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) صفر

۴۸- به‌ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a، تابع $f(x)=\begin{cases} ax+5 & x\ge 1 \\ x^2-a & x<1 \end{cases}$ در R مشتق‌پذیر است؟

۱) $\{-2,2\}$ ۲) $\{-2\}$ ۳) $\{2\}$ ۴) $\varnothing$

۴۹- تابع f با ضابطه‌ی مقابل در چند نقطه ناپیوسته و در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x<0 \\ x+1 & 0\le x<1 \\ 2x+2 & 1\le x<2 \\ x^2+2 & x\ge 2 \end{cases}$$

۱) یک نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق‌ناپذیر
۲) دو نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق‌ناپذیر
۳) یک نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق‌ناپذیر
۴) دو نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق‌ناپذیر

۵۰- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax+b & x>1 \\ \sqrt{x+3} & -3\le x\le 1 \end{cases}$، در بازه‌ی $[-3,+\infty)$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار b کدام است؟

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{7}{4}$ ۴) وجود ندارد.

۵۱- تابع $f(x)=\begin{cases} 1+\cos x & x>0 \\ x+2 & x=0 \\ x & x<0 \end{cases}$ مفروض است. کدام گزاره درست است؟

۱) f در $x=0$ مشتق راست دارد، ولی مشتق چپ ندارد.
۲) f در $x=0$ مشتق چپ دارد، ولی مشتق راست ندارد.
۳) f در $x=0$ نه مشتق راست دارد، نه مشتق چپ.
۴) f در $x=0$ مشتق‌پذیر است.

۵۲- تابع $f(x)=\begin{cases} x|x| & x<0 \\ \sqrt{x} & x\ge 0 \end{cases}$ مفروض است. در نقطه‌ی $x_0=0$ کدام گزینه درباره‌ی این تابع درست است؟

۱) مشتق‌پذیر است.
۲) فقط مشتق راست دارد.
۳) فقط مشتق چپ دارد.
۴) مشتق چپ و راست نابرابر دارد.

۵۳- توابع $f(x)=\begin{cases} (x-1)\sin\frac{1}{x-1} & x\ne 1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} (x-1)^2\sin\frac{1}{x-1} & x\ne 1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=1$ چه وضعیتی دارند؟

۱) هر دو مشتق‌پذیر
۲) هر دو مشتق‌ناپذیر
۳) f مشتق‌پذیر و g مشتق‌ناپذیر
۴) f مشتق‌ناپذیر و g مشتق‌پذیر

۵۴- تابع $f(x)=|x-1|[x]$ در نقطه‌ی $x=1$ .....

۱) پیوسته نیست، ولی حد دارد. ۲) مشتق‌پذیر است. ۳) حد ندارد. ۴) مشتق چپ و راست نابرابر دارد.

۵۵- کدام تابع در $x=0$ مشتق‌ناپذیر است؟

۱) $f(x)=x^3-2|x|$ ۲) $f(x)=x\sqrt[3]{x}$ ۳) $f(x)=x|x|$ ۴) $f(x)=x(x-|x|)$

۵۶- به‌ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=x|x-1|+a|x-1|$ در $x=1$ مشتق‌پذیر است؟

۱) $a=1$ ۲) $a=0$ ۳) $a=-1$ ۴) همه‌ی مقادیر

۵۷- کدام‌یک از توابع زیر در $x_0=2$ مشتق‌پذیر است؟

۱) $f_1(x)=\sqrt{x^2-4x+4}$
۲) $f_2(x)=(x-2)[x]$
۳) $f_3(x)=|x-2|(x-2)$
۴) $f_4(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$

۵۸- اگر تابع $f(x)=|x^2+x+m|$ در R مشتق‌پذیر باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m>\frac{1}{4}$ ۲) $m\ge\frac{1}{4}$ ۳) $m\le\frac{1}{4}$ ۴) $m>\frac{1}{8}$

۵۹- اگر تابع $f(x)=(x-2)^m[x]$ در $x=2$ مشتق‌پذیر باشد، m کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۰- اگر تابع $f(x)=(x-1)^n[x+1]$ در $x=1$ مشتقی مخالف صفر داشته باشد، n کدام عدد می‌تواند باشد؟ $(n\in N)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار n

۶۱- تابع $f(x)=(x^2+ax+b)[2x+1]$ در $x=1$ مشتق‌پذیر است. مقدار b کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) -4

* ۶۲- اگر $f(x)=(x^3+ax+b)[x]$ در $x_0=2$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) -4 ۴) ۴

۶۳- تابع $f(x)=[\sin^3 x]$ در $x=\pi$ ...

۱) مشتق‌پذیر است. ۲) فقط مشتق راست دارد. ۳) فقط مشتق چپ دارد. ۴) پیوسته است، ولی مشتق‌پذیر نیست.

۶۴- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x[\sin x]$ روی بازه‌ی $(-\pi,\frac{\pi}{2})$ کدام وضعیت را دارد؟

۱) پیوسته- مشتق‌پذیر ۲) ناپیوسته- مشتق‌پذیر ۳) پیوسته- مشتق‌ناپذیر ۴) ناپیوسته- مشتق‌ناپذیر

۶۵- کدام گزینه درباره‌ی تابع $f(x)=[|x|]$ در $x=0$ درست است؟

۱) پیوسته است، اما مشتق‌پذیر نیست. ۲) فقط مشتق راست دارد.

۳) فقط مشتق چپ دارد. ۴) مشتق‌پذیر است.

۶۶- در کدام تابع شرایط $f'_-(0)=+\infty$ و $f'_+(0)=-\infty$ برقرار است؟

۱) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ۲) $f(x)=-\sqrt[3]{x}$ ۳) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ ۴) $f(x)=-\sqrt[3]{x^2}$

۶۷- برای تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$، نقاط $A(1,0)$ و $B(-2,0)$ به‌ترتیب کدام عنوان را دارند؟

۱) عطف و عطف ۲) عطف و بازگشت ۳) بازگشت و عطف ۴) بازگشت و بازگشت

۶۸- تابع $f(x)=(x^2-4)^{\frac{2}{3}}$ در چند نقطه از دامنه‌اش مشتق‌ناپذیر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۹- تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2+1}{x^2-4} & x\ge 0\\ \sqrt[3]{x} & x<0\end{cases}$ در چند نقطه از دامنه‌اش مشتق‌ناپذیر است؟

۱) یک نقطه ۲) دو نقطه ۳) سه نقطه ۴) چهار نقطه

۷۰- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & |x|\le 1\\ |x|-1 & |x|>1\end{cases}$ در چند نقطه پیوسته است، ولی مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۷۱- تابع $f(x)=\begin{cases}|x^2-1| & |x|\le 2\\ 4x-1 & |x|>2\end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۲- تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+1|}{x-2} & x<1\\ \dfrac{|x-1|}{x+2} & x\ge 1\end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۳- تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^3} & x\ge 0\\ |(x+1)(x+2)^2| & x<0\end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۷۴- نمودار تابع $f(x)=|x^3|+|x^3+2x^2+x|$ در چند نقطه زاویه‌دار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۵- تابع $y=|x^3+x-1|$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) یک نقطه ۲) دو نقطه ۳) سه نقطه ۴) صفر نقطه

۷۶- اگر نمودار تابع $f(x)=|x^3-2x^2+ax|$ فقط یک نقطه‌ی زاویه‌دار داشته باشد، مقدار a کدام است؟ $(a\neq 0)$

۱) $|a|\leq 1$ ۲) $|a|\geq 1$ ۳) $|a|<1$ ۴) $a\geq 1$

* ۷۷- تابع $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)|x+1|(x^4+ax^2+bx+c)}$ در R مشتق‌پذیر است. حاصل $a+2b+3c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر

۳) -1 ۴) هیچ مقداری برای a، b و c وجود ندارد.

۷۸- تابع $f(x)=|x^2-2|x||$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۷۹- تابع $f(x)=[\sqrt{5}x]$ در بازه‌ی $(0,4)$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

۸۰- تابع $y=|\sin x-1|$ در چند نقطه از دامنه‌اش در بازه‌ی $(-2\pi,2\pi)$ مشتق‌ناپذیر است؟

۱) یک نقطه ۲) دو نقطه ۳) سه نقطه ۴) صفر نقطه

* ۸۱- اگر $f(x)=|\tan x-\cot x|$، آن‌گاه تابع f در بازه‌ی $(0,\pi)$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۲- تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری تابع $f(x)=||x|-1|$ بر روی R کدام است؟ (سراسری- ۸۵)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۳- تابع با ضابطه‌ی $y=x\sqrt{x^2}$ از نظر پیوستگی و مشتق‌پذیری در صفر چگونه است؟ (سراسری- ۸۷)

۱) پیوسته و مشتق‌پذیر است. ۲) پیوسته است، ولی مشتق‌پذیر نیست.

۳) نه پیوسته است و نه مشتق‌پذیر. ۴) فقط از راست پیوسته و از راست مشتق‌پذیر است.

۸۴- تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in Q \\ 0 & x\in R-Q \end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌پذیر است؟ (سراسری - ۸۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۵- مشتق چپ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$، در نقطه‌ی $x=0$ کدام است؟ (سراسری- ۸۹)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

۸۶- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{1+|x|}$ در نقطه‌ی $x=\alpha$ مشتق ندارد. مقدار $f'_+(\alpha)-f'_-(\alpha)$ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۵)

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) تعریف نشده

۸۷- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x+\frac{1}{3}]+[x]$ روی بازه‌ی $(0,3)$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۶)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸۸- اگر $f(x)=1-|x|$، تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری تابع با ضابطه‌ی $y=f(f(x))$ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۹- تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{x}}{x} & x\geq 1\\ ax^2+bx & x<1\end{cases}$، بر روی R مشتق‌پذیر است. مقدار b کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۹)

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۳ ۴) ۵

۹۰- کدام تابع در $x=1$ مشتق‌پذیر است؟ (آزاد- ۸٦)

۱) $y=[(x-1)^3]$ ۲) $y=(x-1)[\sqrt[3]{x-1}]$ ۳) $y=[\sqrt[3]{(x-1)^2}]$ ۴) $y=\sqrt[3]{x-1}[(x-1)^3]$

۹۱- در تابع $y=\begin{cases}x^3 & |x|\geq 1\\ 2x^2-1 & |x|<1\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(1+\Delta x)-1}{\Delta x}$ چقدر است؟ (آزاد- ۸٦)

۱) ۳ ۲) -3 ۳) ۴ ۴) -4

۹۲- در تابع $f(x)=|x-1|+3|x-2|$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h^2)+f(2+h^2)-4}{h^2}$ کدام است؟ (آزاد- ۸٦)

۱) ۷ ۲) -7 ۳) -1 ۴) ۲

۹۳- برای تابع $f(x)=\frac{|x-1|+1}{|x|+1}$، حاصل $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$ چقدر است؟ (آزاد- ۸۷)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۹٤- تابع $y=(x^3+3x^2+ax+b)[x]$ در $x=2$ مشتق‌پذیر است. مقدار $a+b$ کدام است؟ (آزاد - ۹۰)

۱) ۵۲ ۲) -52 ۳) -4 ۴) ۴

WWW.RIAZISARA.IR

WWW.RIAZISARA.IR

فصل ۴

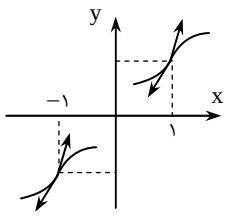
مفاهیم اولیه‌ی مشتق

پاسخ‌های تشریحی

A **۱- گزینه‌ی (۲)** به شیب خطوط مماس بر نمودار تابع دقت کنید.

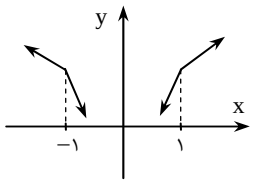
A **۲- گزینه‌ی (۳)** تابع در نقاط x_2، x_3، x_4 و x_5 مشتق‌ناپذیر است. نقاط x_2 و x_5 نقاط ناپیوستگی‌اند، نقطه‌ی x_3 نقطه‌ی زاویه‌دار و نقطه‌ی x_4، نقطه‌ی بازگشت است.

B **۳- گزینه‌ی (۲)** می‌دانیم نمودار توابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. وقتی $f'_+(1)=2$ و $f'_-(1)=1$، مطابق شکل می‌توانیم دو نیم‌مماس به شیب‌های ۲ و ۱ در راست و چپ نمودار در نقطه‌ی به‌طول $x=1$ روی آن رسم کنیم. قرینه‌ی این نیم‌مماس‌ها نسبت به مبدأ مختصات را نیز رسم کرده‌ایم که وضعیت نمودار تابع در $x=-1$ را نشان می‌دهند. مطابق شکل داریم: $f'_-(-1)=2$ و $f'_+(-1)=1$.



B **۴- گزینه‌ی (۱)** از فرض $f'_+(1)=1$ و $f'_-(1)=2$ نتیجه می‌گیریم در نقطه‌ی $x=1$ می‌توانیم دو نیم‌مماس با شیب‌های ۱ و ۲ از راست و چپ بر نمودار تابع رسم کنیم. چون f تابعی زوج است، نمودار آن نسبت به محور y ها متقارن است، پس مطابق شکل داریم:

$f'_+(-1)=-2\ ,\ f'_-(-1)=-1$



A **۵- گزینه‌ی (۳)** اگر قرار دهیم $f(x)=\sqrt{x}$، دو نقطه $(2,f(2))$ و $(2+h,f(2+h))$ هستند و ضریب زاویه‌ی خط گذرنده از آن‌ها با کسر $\frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2}$ بیان می‌شود. پس با $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$ کار داریم که برابر است با: $\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

C **۶- گزینه‌ی (۴)** شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A(2,f(2))$ و $B(x,f(x))$ برابر است با: $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$. پس طبق فرض داریم: $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=x^2+2x+4$ و می‌خواهیم $f'(2)$ را بیابیم:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$$

A **۷- گزینه‌ی (۱)** برای محاسبه‌ی $f'(-2)$ باید از ضابطه‌ی اول تابع استفاده کنیم:

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=x^2+x+1$$
$$\Rightarrow f'(x)=2x+1\Rightarrow f'(-2)=-4+1=-3$$

A **۸- گزینه‌ی (۳)** از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{2x^2+x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-4x^2}{2x^2+x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-4x^2}{(2x+1)x^2}=\frac{-4}{1}=-4$$

A **۹- گزینه‌ی (۴)** می‌دانیم، $f(x)=\frac{1}{2}|x|\sqrt{a-x^2}$، حال با توجه به آن‌که $f(0)=0$، داریم:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\sqrt{a-x^2}}{x}=\frac{-1}{2}\sqrt{a}$$
$$\Rightarrow\frac{-\sqrt{a}}{2}=-1\Rightarrow a=4$$

B **۱۰- گزینه‌ی (۲)** از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{a}{\pi}\tan^{-1}(\frac{1}{x})=\frac{a}{\pi}\lim_{t\to -\infty}\tan^{-1}(t)$$
$$=\frac{a}{\pi}\times\frac{-\pi}{2}=-\frac{a}{2}\Rightarrow -\frac{a}{2}=2\Rightarrow a=-4$$

B **۱۱- گزینه‌ی (۳)** چون $f(0)=0$، داریم:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1-1+x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

D **۱۲- گزینه‌ی (۴)** مانند تست قبل داریم: $f'_+(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $f'_-(0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (دقت کنید که برای $x<0$، باید به‌جای x در مخرج کسر مشتق قرار دهید: $-\sqrt{x^2}$). پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست‌اند. حال به‌دلیل نامساوی‌های برگشت‌پذیر زیر گزینه‌ی (۳) نیز رد می‌شود:

$$\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}>\frac{\sqrt{2}}{2}x\overset{x>0}{\Leftrightarrow}1-\sqrt{1-x^2}>\frac{1}{2}x^2\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}x^2>\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow 1-x^2+\frac{1}{4}x^4>1-x^2\Leftrightarrow\frac{1}{4}x^4>0$$

معنی نامساوی‌های بالا این است که برای $x>0$، نمودار تابع بالاتر از نیم مماس راست (با معادله‌ی $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$) قرار می‌گیرد. به‌همین ترتیب برای $x<0$ ثابت می‌شود $f(x)>-\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

B **۱۳- گزینه‌ی (۲)** با توجه به نمودار $y=\tan^{-1}x$، برای $x>0$ داریم: $\tan^{-1}x>0$ و برای $x<0$: $\tan^{-1}x<0$. پس x و $\tan^{-1}x$ هم‌علامت‌اند و در نتیجه: $f(x)=x\tan^{-1}x$، بنابراین:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\tan^{-1}x=0$$

B **۱۴- گزینه‌ی (۲)** در همسایگی کوچک $x=\frac{\pi}{2}$ داریم: $[x]=1$ و $g(x)=\sin x$، بنابراین: $g'(x)=\cos x\Rightarrow g'(\frac{\pi}{2})=0$

B **۱۵- گزینه‌ی (۳)** در نقطه‌ی مورد نظر داریم: $\frac{x_0}{2}\notin Z$، بنابراین تابع $y_1=[\frac{x}{2}]$ در این نقطه پیوسته و دارای مشتقی برابر صفر است. پس فقط باید مشتق $y_2=x$ را در نقطه‌ی $x_0=2k-1$ بیابیم که به وضوح برابر ۱ است.

B **۱۶- گزینه‌ی (۱)** $\sin\pi x$ در $x=2$ صفر می‌شود، پس به‌دلیل عامل صفر کننده در پیوستگی، تابع f در $x=2$ پیوسته است. حال برای $2\le x<3$ داریم: $f(x)=2\sin\pi x$ و بنابراین: $f'(x)=2\pi\cos\pi x\Rightarrow f'_+(2)=2\pi\cos 2\pi=2\pi$

B **۱۷- گزینه‌ی (۴)** علامت عبارت x^3-8 مانند علامت عبارت $x-2$ است. بنابراین:

$$x\to 2^+: x>2\Rightarrow -x<-2\ ,\ x^3-8>0\Rightarrow f(x)=-3(x^3-8)\Rightarrow f'(x)=-9x^2\Rightarrow f'_+(2)=-36$$
$$x\to 2^-: x<2\Rightarrow -x>-2\ ,\ x^3-8<0\Rightarrow f(x)=-2(8-x^3)\Rightarrow f'(x)=6x^2\Rightarrow f'_-(2)=24$$

B **۱۸- گزینه‌ی (۱)** در همسایگی چپ $x_0=-1$ ضابطه‌ی تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$x\to(-1)^-\Rightarrow x<-1\Rightarrow x^2>1\Rightarrow\begin{cases}-x^2<-1\Rightarrow -x^2\to(-1)^-\\ x^2-1>0\Rightarrow|x^2-1|=x^2-1\end{cases}\Rightarrow f(x)=-2x^2+x^2-1=-x^2-1$$

پس $\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=-1-1=-2$ و $f(-1)=1\times(-1)+0=-1$، یعنی تابع f در نقطه‌ی $x_0=-1$ از چپ ناپیوسته و بنابراین مشتق‌ناپذیر است.

B **۱۹- گزینه‌ی (۲)** ضابطه‌ی تابع را در همسایگی $x=a$ می‌نویسیم: (دقت کنید که $f(a)=0$ و تابع در $x=a$ پیوسته است)

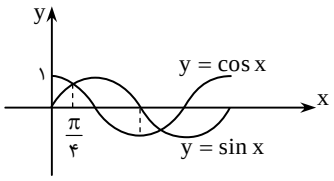
$$a<x<a+1\Rightarrow -(a+1)<-x<-a\Rightarrow f(x)=(x-a)(-a-1)\Rightarrow f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{(x-a)(-a-1)}{x-a}=-a-1$$
$$a-1<x<a\Rightarrow -a<-x<-(a-1)\Rightarrow f(x)=(x-a)(-a)\Rightarrow f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{(x-a)(-a)}{x-a}=-a$$

پس $f'_+(a)+f'_-(a)=-a-1-a=-2a-1$.

B **۲۰- گزینه‌ی (۴)** داریم: $f(۲)=۰$ و می‌دانیم برای $۱<x<۳$ که $x\neq ۲$ داریم: $[x]+[-x]=-۱$. بنابراین در همسایگی $x=۲$ داریم: $f(x)=-(x^۲-۲x)$، یعنی f در $x=۲$ پیوسته است و در نتیجه: $f'(x)=-۲x+۲ \Rightarrow f'(۲)=-۲$.

C **۲۱- گزینه‌ی (۴)** با توجه به آن‌که $\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})$، وقتی $x\to(\frac{۳\pi}{۴})^+$، داریم: $x+\frac{\pi}{۴}\to\pi^+$، بنابراین $\sin(x+\frac{\pi}{۴})\to ۰^-$، یعنی تابع $f(x)$ در همسایگی راست $x=\frac{۳\pi}{۴}$ مقدار $[۰^-]=-۱$ را دارد، ولی $f(\frac{۳\pi}{۴})=۰$. پس در این نقطه f از راست ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

C **۲۲- گزینه‌ی (۳)** مطابق نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ که در شکل مقابل رسم شده است، در همسایگی کوچک راست $x=\frac{\pi}{۴}$ داریم: $\sin x>\cos x$. بنابراین:



$$f(x)=a(\sin x-\cos x)\Rightarrow f'(x)=a(\cos x+\sin x)$$
$$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۲}a\Rightarrow \sqrt{۲}a=۱\Rightarrow a=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

B **۲۳- گزینه‌ی(۲)** مشتق تابع $f(x)=\sin ۲x$ را در $x=\frac{\pi}{۲}$ با یکی از دو حد زیر می‌توانیم به‌دست آوریم:

$$۱)\ \lim_{h\to ۰}\frac{f(\frac{\pi}{۲}+h)-f(\frac{\pi}{۲})}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(\pi+۲h)-\sin\pi}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(\pi+۲h)}{h}$$

$$۲)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{۲})}{x-\frac{\pi}{۲}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin ۲x-\sin\pi}{x-\frac{\pi}{۲}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin ۲x}{x-\frac{\pi}{۲}}$$

A **۲۴- گزینه‌ی(۲)** حد مورد نظر را به حدی که بیانگر مشتق تابع است، ربط می‌دهیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{\sqrt{x}-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{\sqrt{x}-۱}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\lim_{x\to ۱}(\sqrt{x}+۱)\times\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=۲f'(۱)$$

B **۲۵- گزینه‌ی(۴)** چون f در $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پیوسته نیز می‌باشد، بنابراین: $\lim_{x\to ۲}f(x)-f(۲)=۰$، در نتیجه حاصل حد خواسته شده نیز $\frac{۰}{۸}=۰$ می‌شود.

B **۲۶- گزینه‌ی(۲)** از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم: $f'(x_۰)=-۲$، حال با توجه به نکات بخش آموزش داریم:

$$\text{جواب}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+۰\times h)-f(x_۰-۲h)}{h}=(۰-(-۲))f'(x_۰)=۲f'(x_۰)=۲\times(-۲)=-۴$$

B **۲۷- گزینه‌ی(۲)** از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم $f'_+(x_۰)=۲$. با تغییر متغیر $t=-h$ حد مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{t\to ۰^+}\frac{f(x_۰)-f(x_۰+t)}{-t}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{f(x_۰+t)-f(x_۰)}{t}=f'_+(x_۰)=۲$$

B **۲۸- گزینه‌ی(۳)** اگر قرار دهیم $h=\frac{۱}{n}$، وقتی $n\to\infty$، داریم: $h\to ۰^+$ و حد مورد نظر به‌صورت $\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(x_۰+h)-f(x_۰-h)}{h}$ در می‌آید. چون این حد وجود دارد، بنابر حد دنباله‌ای، حد اولیه نیز وجود دارد و حاصل آن دو یکی است. مقدار حد آخر نیز برابر است با: $(۱-(-۱))f'(x_۰)=۲f'(x_۰)$.

C **۲۹- گزینه‌ی (۱)** طبق نکات بخش آموزش داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+۲h)-f(x-۴h)}{۳h}=\frac{۱}{۳}(۲-(-۴))f'(x)=۲f'(x)\Rightarrow ۲f'(x)=\sqrt{۲x}\Rightarrow f'(x)=\sqrt{\frac{x}{۲}}$$

حال برای کسر دوم می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{جواب}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲-h)}{h(۳h+۲)}=\frac{۱}{۲}\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲-h)}{h}=\frac{۱}{۲}(۱-(-۱))f'(۲)=f'(۲)\xrightarrow{\text{نتیجه بالا}}\text{جواب}=\sqrt{\frac{۲}{۲}}=۱$$

B **۳۰- گزینه‌ی(۳)** اگر قرار دهیم $t=-\Delta x$، آن‌گاه $t\to ۰$ و با توجه به این‌که $f(۲)=۱$ داریم:

$$\text{جواب}=\lim_{t\to ۰}\frac{f(۲+t)-f(۲)}{-t}=-\lim_{t\to ۰}\frac{f(۲+t)-f(۲)}{t}=-f'(۲)=-\frac{\pi}{۴}\cos(\frac{\pi}{۴}\times ۲)=۰$$

B **۳۱- گزینه‌ی (۱)** اگر قرار دهیم $g(x)=f^{۳}(x)$، مقدار $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{g(۴+h)-g(۴)}{h}=g'(۴)$ را می‌خواهیم. داریم:

$$g(x)=x^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow g'(x)=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow g'(۴)=\frac{۳}{۲}\sqrt{۴}=۳$$

B **۳۲- گزینه‌ی(۴)** مقدار حد همان $f'_-(۱)$ می‌شود، ولی تابع f در نقطه‌ی $x=۱$ از چپ ناپیوسته و از راست پیوسته است ($\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=۰$ ، $f(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=۲$). پس مشتق چپ ندارد.

تذکّر: اگر در کسر مورد نظر مقادیر مربوط را قرار دهید، حاصل حد را $+\infty$ به‌دست خواهید آورد:

$$h\to ۰^-\Rightarrow ۱+h<۱\Rightarrow f(۱+h)-f(۱)=(۱+h)^{۲}-۱-۲=h^{۲}+۲h-۲$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=\lim_{h\to ۰^-}(h+۲-\frac{۲}{h})=+\infty$$

B **۳۳- گزینه‌ی (۲)** با جای‌گذاری $t=-h$، حد مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{t\to ۰^+}\frac{f(۲+t)-۱}{-t}\xrightarrow{f(۲)=۱}-\lim_{t\to ۰^+}\frac{f(۲+t)-f(۲)}{t}=-f'_+(۲)$$

تابع f در $x=۲$ پیوسته است ($\lim\limits_{x\to ۲^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}f(x)=۱$)، بنابراین برای محاسبه‌ی مشتق‌های چپ و راست f در $x=۲$ می‌توانیم از ضابطه‌های آن مشتق بگیریم:

$$x>۲: f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}\Rightarrow f'_+(۲)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \text{جواب نهایی}=-\frac{۱}{۲}$$

B **۳۴- گزینه‌ی (۱)** تابع در $x=-۱$ پیوسته است. حال داریم:

$$\text{جواب}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(-۱)-f(-۱+h)}{h}=-\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}=-f'_-(-۱)=-(\frac{-۵}{x^{۲}}-۳)\Big|_{x=-۱}=۸$$

A **۳۵- گزینه‌ی (۱)** حد مورد نظر را با جای‌گذاری $h=\Delta x$ می‌توانیم به‌صورت $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۰+h)-f(۰+۲h)}{h}$ بنویسیم که با توجه به نکات بخش آموزش، حاصل آن برابر است با:

$$(۱-۲)f'(۰)=-f'(۰)=-\frac{۱}{۲\sqrt{۰+۴}}=-\frac{۱}{۴}$$

C **۳۶- گزینه‌ی (۱)** با اضافه و کم‌کردن $f(۲)$ در صورت کسر، می‌توانیم حد مورد نظر را به‌صورت مجموع دو حد بیانگر مشتق تفکیک کنیم:

$$\text{جواب}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۲+۳h)-f(۲)}{h}-\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۲-۲h)-f(۲)}{h}$$

$$\xrightarrow[k=-۲h]{t=۳h}\lim_{t\to ۰^-}\frac{f(۲+t)-f(۲)}{\frac{۱}{۳}t}-\lim_{k\to ۰^+}\frac{f(۲+k)-f(۲)}{-\frac{۱}{۲}k}=۳f'_-(۲)+۲f'_+(۲)$$

حال با توجه به آن‌که f در $x=۲$ پیوسته است، برای محاسبه‌ی مشتق‌های چپ و راست می‌توانیم از مشتق ضابطه‌ها استفاده کنیم:

$$f'(x)=\begin{cases}۶x-۱ & x>۲\\ ۲ & x<۲\end{cases}\Rightarrow f'_-(۲)=۲\ ,\ f'_+(۲)=۱۱\Rightarrow \text{جواب نهایی}=۳\times ۲+۲\times ۱۱=۲۸$$

B **۳۷- گزینه‌ی (۳)** با قرار دادن $t=-|h|$، حد مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{t\to ۰^-}\frac{f(-۲)-f(-۲+t)}{-t}=\lim_{t\to ۰^-}\frac{f(-۲+t)-f(-۲)}{t}=f'_-(-۲)$$

در همسایگی نقطه‌ی $x=-۲$ داریم: $f(x)=-x$، بنابراین: $f'(x)=-۱$ و در نتیجه: $f'_-(-۲)=-۱$.

C **۳۸- گزینه‌ی (۳)** با اضافه و کم کردن $f(۰)$ در صورت کسر، می‌توانیم حد مورد نظر را به‌صورت مجموع دو حد بیانگر مشتق تفکیک کنیم:

$$\text{جواب}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۲h)-f(۰)}{h}-\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(-۳h)-f(۰)}{h}\xrightarrow[k=-۳h]{t=۲h}\lim_{t\to ۰^-}\frac{f(۰+t)-f(۰)}{\frac{۱}{۲}t}-\lim_{k\to ۰^+}\frac{f(۰+k)-f(۰)}{-\frac{۱}{۳}k}$$

$$=۲f'_-(۰)+۳f'_+(۰)$$

تابع f در $x=۰$ پیوسته است، و برای $x\to ۰^+$ داریم:

$$f(x)=x\sqrt{x+۴}\Rightarrow f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to ۰^+}\sqrt{x+۴}=۲$$

به‌همین ترتیب داریم: $f'_-(۰)=-۲$، بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با: $۲\times(-۲)+۳\times ۲=۲$

C **۳۹- گزینه‌ی (۱)** با اضافه و کم کردن $f(1)$ در صورت کسر، می‌توانیم حد مورد نظر را به‌صورت مجموع دو حد بیانگر مشتق تفکیک کنیم:

$$\text{جواب} = \lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h^2)-f(1)}{h^2} - \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h^2)-f(1)}{h^2} \xrightarrow[k=h^2]{t=-2h^2} \lim_{t\to 0^-}\frac{f(1+t)-f(1)}{-\frac{1}{2}t} - \lim_{k\to 0^+}\frac{f(1+k)-f(1)}{k}$$

$$= -2f'_-(1) - f'_+(1)$$

با توجه به آن‌که f در $x=1$ پیوسته است، برای محاسبه‌ی مشتق‌های بالا می‌توانیم از ضابطه‌ها مشتق بگیریم:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & x>1 \\ 3x^2 & x<1 \end{cases} \Rightarrow f'_+(1) = -1\ ,\ f'_-(1) = 3 \Rightarrow \text{جواب نهایی} = -2\times 3-(-1) = -5$$

C **۴۰- گزینه‌ی(۲) راه اول:** با اضافه و کم کردن $2f(2)$ در صورت کسر داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(2)}{x-2} - \lim_{x\to 2}\frac{2f(x)-2f(2)}{x-2} = f(2)\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-2} - 2\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f(2)-2f'(2)$$

راه دوم: با توجه به ابهام $\frac{0}{0}$ از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\text{جواب} = \lim_{x\to 2}\frac{f(2)-2f'(x)}{1} = f(2)-2f'(2)$$

برای استفاده از این راه باید فرض کنید تابع f' در $x=2$ پیوسته است.

A **۴۱- گزینه‌ی (۱)** اگر قرار دهیم $f(x)=x^2+2x$، آن‌گاه $f(1)=3$ و $f'(x)=2x+2$، هم‌چنین داریم:

$$\text{جواب} = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1) = 2\times 1+2 = 4$$

B **۴۲- گزینه‌ی(۲)** اگر قرار دهیم $f(x)=x^3+x+c$ که c یک عدد حقیقی دلخواه است، $f'(1)$ را می‌توان با حد مورد نظر بیان کرد.

B **۴۳- گزینه‌ی (۳)** اگر قرار دهیم $g(x)=2x^2+kx$، حد مورد نظر به‌صورت $\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}$ در می‌آید. بنابراین $g'(2)=12$ و چون $g'(x)=4x+k$، نتیجه می‌گیریم:

$$8+k=12 \Rightarrow k=4$$

C **۴۴- گزینه‌ی (۱)** تابع f در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته است و می‌دانیم $f'_+(1)=2$، زیرا $f'(x)=\begin{cases}2x & x>1\\ 3x^2 & x<1\end{cases}$. بنابراین:

$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=2$. پس اگر قرار دهیم: $g(h)=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$، آن‌گاه: $\lim_{h\to 0^+}g(h)=2$

حال دنباله‌ی $\{\frac{1}{n^2}\}$ را در نظر بگیرید. وقتی $n\to\infty$، داریم: $a_n=\frac{1}{n^2}\to 0^+$، بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}g(a_n) = \lim_{h\to 0^+}g(h) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}n^2\left(f(1+\frac{1}{n^2})-f(1)\right)=2$$

A **۴۵- گزینه‌ی (۴)** برای $x\ge 2$ تابع یک چند جمله‌ای است $(f(x)=ax^2+bx)$، بنابراین در $x=2$ همواره از راست پیوسته و مشتق‌پذیر است.

A **۴۶- گزینه‌ی (۳)** از پیوستگی f در $x=1$ نتیجه می‌گیریم: $a=b+2$، حال با فرض پیوستگی داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}2ax & x<1\\ 3bx^2+2 & x>1\end{cases} \xrightarrow[\text{پیوسته}]{f\ \text{در}\ x=1} f'_+(1)=3b+2\ ,\ f'_-(1)=2a \Rightarrow \begin{cases}2a=3b+2\\ a=b+2\end{cases} \Rightarrow a=4\ ,\ b=2$$

A **۴۷- گزینه‌ی (۳)** از پیوستگی f در $x=2$ نتیجه می‌گیریم: $4a-2+b=0$. حال با فرض پیوستگی در همسایگی $x=2$ داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}2ax-1 & -2<x<2\\ 1 & x>2\end{cases} \xrightarrow[\text{مشتق‌پذیر}]{f\ \text{در}\ x=2} 4a-1=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \xrightarrow{4a-2+b=0} b=0$$

B **۴۸- گزینه‌ی (۴)** از پیوستگی f در $x=1$ نتیجه می‌گیریم: $a+5=1-a \Rightarrow a=-2$، حال با فرض پیوستگی داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}a & x>1\\ 2x & x<1\end{cases} \xrightarrow{f'_+(1)=f'_-(1)} a=2 \rightarrow \quad a=-2 \ \text{در تناقض با نتیجه‌ی}$$

B **۴۹- گزینه‌ی (۳)** تابع در نقطه‌ی $x=1$ ناپیوسته (و بنابراین مشتق‌ناپذیر) است، زیرا $\lim_{x\to 1^-} f(x)=1+1=2$ و $\lim_{x\to 1^+} f(x)=2+2=4$.

هم‌چنین ضابطه‌ی $f'(x)$ را به‌صورت روبه‌رو می‌توان نوشت.

$$f'(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & 0<x<1\\ 2 & 1<x<2\\ 2x & x>2\end{cases}$$

در نقاط $x=0$ و $x=2$ نیز تابع مشتق‌ناپذیر است. پس روی هم یک نقطه‌ی ناپیوستگی و سه نقطه‌ی مشتق‌ناپذیری داریم.

B **۵۰- گزینه‌ی (۴)** تابع f در $x=-3$ از راست مشتق‌پذیر نیست، پس در بازه‌ی $[-3,+\infty)$ مشتق‌پذیر نیست. زیرا:

$$f(-3)=0 \Rightarrow f'_+(-3)=\lim_{x\to(-3)^+}\frac{f(x)}{x+3}=\lim_{x\to(-3)^+}\frac{\sqrt{x+3}}{x+3}=\lim_{x\to(-3)^+}\frac{1}{\sqrt{x+3}}=+\infty$$

A **۵۱- گزینه‌ی (۱)** تابع f در $x=0$ پیوستگی راست دارد ($f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=2$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$). تابع $y=1+\cos x$ نیز در R مشتق‌پذیر است. بنابراین f در $x=0$ از راست مشتق‌پذیر است.

B **۵۲- گزینه‌ی (۳)** تابع در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته است. پس برای مشتق چپ و راست آن در این نقطه، می‌توانیم از مشتق‌های دو ضابطه استفاده کنیم. تابع $y_1=x|x|$ در R مشتق‌پذیر است، ولی تابع $y_2=\sqrt{x}$ در $x=0$ مشتق‌ناپذیر است، پس تابع f در $x=0$ فقط مشتق چپ دارد.

B **۵۳- گزینه‌ی (۴)** برای تابع f داریم: $f(1)=0=$ کران‌دار × صفر $=\lim_{x\to 1} f(x)$، پس تابع f در $x=1$ پیوسته است (و به همین ترتیب نتیجه می‌گیریم g نیز در $x=1$ پیوسته است). f در $x=1$ مشتق‌ناپذیر است، زیرا:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\sin\frac{1}{x-1}\to \text{وجود ندارد}$$

با استدلالی مشابه نتیجه می‌گیریم $g'(1)=0$، پس g در $x=1$ مشتق‌پذیر است.

B **۵۴- گزینه‌ی (۴)** در همسایگی $x=1$ ضابطه‌ی تابع را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}|x-1| & 1\le x<2\\ 0 & 0\le x<1\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x-1 & 1\le x<2\\ 0 & 0\le x<1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}1 & 1<x<2\\ 0 & 0<x<1\end{cases}$$

$\Rightarrow$ f در $x=1$ پیوسته و مشتق ناپذیر

B **۵۵- گزینه‌ی (۱)** گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) در $x=0$ مشتق‌پذیرند، مثلاً برای تابع گزینه‌ی (۴) داریم:

$$f(0)=0\Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}x-|x|=0$$

ولی تابع گزینه‌ی (۱) از جمع یک تابع مشتق‌پذیر و یک تابع مشتق‌ناپذیر تشکیل شده، بنابراین خود مشتق‌ناپذیر است.

B **۵۶- گزینه‌ی (۳)** چون $f(x)=(x+a)|x-1|$، اگر $x=1$ ریشه‌ی $x+a$ نباشد، تابع در $x=1$ مشتق‌ناپذیر است. پس باید $1+a=0$، بنابراین $a=-1$.

B **۵۷- گزینه‌ی (۳)** چون $f_1(x)=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$، تابع f_1 در نقطه‌ی $x=2$ مشتق‌ناپذیر است. هم‌چنین طبق نکات بخش آموزش، تابع گزینه‌ی (۴) نیز در $x=2$ مشتق‌ناپذیر است. تابع گزینه‌ی (۳) مشتق‌پذیر است، زیرا:

$$f'_3(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f_3(x)-f_3(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}|x-2|=0$$

به‌همین ترتیب می‌توانید نشان دهید $f'_2(2)$ وجود ندارد.

B **۵۸- گزینه‌ی (۲)** اگر عبارت x^2+x+m ریشه‌ی ساده (غیر مضاعف) داشته باشد، تابع f در آن نقطه مشتق‌ناپذیر است. پس برای آن‌که تابع f در R مشتق‌پذیر باشد، باید عبارت x^2+x+m یا ریشه نداشته باشد، یا ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، یعنی:

$$\Delta\le 0\Rightarrow 1-4m\le 0\Rightarrow m\ge\frac{1}{4}$$

B **۵۹- گزینه‌ی (۱)** اگر $m\ge 2$، تابع در $x=2$ مشتق‌پذیر است، زیرا با فرض $m\ge 2$ داریم: $(m\in N)$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^m[x]}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-2)^{m-1}[x]$$

که چون $m-1\ge 1$، عامل $(x-2)^{m-1}$ در $x=2$ برابر صفر می‌شود و طبق عامل صفر کننده در پیوستگی، مقدار حد نیز برابر صفر می‌شود.

C **۶۰- گزینه‌ی (۴)** چون $n \in N$، داریم: $f(۱) = ۰$، بنابراین: $f'(۱) = \lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim\limits_{x\to ۱}\frac{(x-۱)^n[x+۱]}{x-۱} = \lim\limits_{x\to ۱}(x-۱)^{n-۱}[x+۱]$

اگر $n = ۱$، به حد $\lim\limits_{x\to ۱}[x+۱]$ می‌رسیم که وجود ندارد. اگر $n \geq ۲$، عامل $(x-۱)^{n-۱}$ به‌ازای $x = ۱$ برابر صفر می‌شود و طبق نکته‌ی عامل صفر کننده در پیوستگی مقدار حد برابر صفر می‌شود. پس هیچ‌گاه مقدار مشتق غیر صفر نمی‌شود.

C **۶۱- گزینه‌ی (۱)** باید $x = ۱$ ریشه‌ی مضاعف $x^۲ + ax + b$ باشد، یعنی:

$$x^۲ + ax + b = (x-۱)^۲ \Rightarrow x^۲ + ax + b = x^۲ - ۲x + ۱ \Rightarrow a = -۲\ ,\ b = ۱$$

تذکّر: برای اثبات نتیجه‌ی فوق به این دقت کنید که اولاً برای پیوسته بودن f در $x = ۱$ باید عبارت $x^۲ + ax + b$ در نقش عامل صفر کننده ظاهر شود، پس $x = ۱$ ریشه‌ی آن است و داریم: $x^۲ + ax + b = (x-۱)g(x)$. حال با این فرض می‌توانیم بنویسیم:

$$f'(۱) = \lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)g(x)[۲x+۱]}{x-۱} = \lim_{x\to ۱}g(x)[۲x+۱]$$

برای وجود داشتن حد بالا باز هم باید $x = ۱$ ریشه‌ی $g(x)$ باشد، یعنی $x = ۱$ ریشه‌ی مضاعف عبارت اولیه است.

D **۶۲- گزینه‌ی (۴)** برای آن‌که f در $x = ۲$ پیوسته باشد، باید $g(x) = x^۳ + ax + b$ در نقش عامل صفر کننده ظاهر شود، یعنی باید $g(۲) = ۰$، پس $g(x) = (x-۲)h(x)$. حال برای مشتق‌پذیری f در $x = ۲$ باید حد زیر موجود باشد:

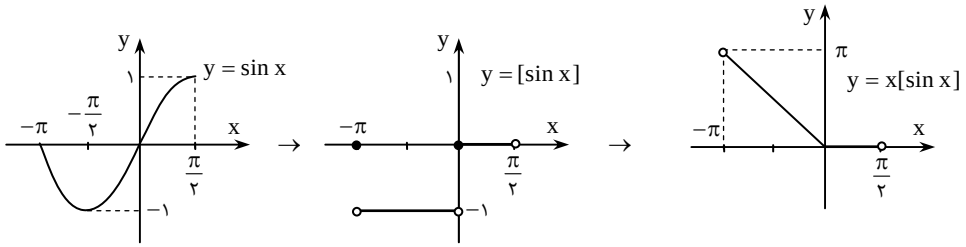
$$f'(۲) = \lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)h(x)[x]-۰}{x-۲} = \lim_{x\to ۲}h(x)[x]$$

برای موجود بودن حد بالا باید $h(x)$ در نقش عامل صفر کننده ظاهر شود، یعنی $h(۲) = ۰$. پس باید $g(x)$ بر $(x-۲)^۲$ بخش‌پذیر باشد، که برای این شرط باید داشته باشیم $g(۲) = g'(۲) = ۰$. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} g(۲) = ۰ \Rightarrow ۸ + ۲a + b = ۰ \\ g'(۲) = ۰ \Rightarrow ۳\times ۴ + a = ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow a = -۱۲\ ,\ b = ۱۶ \Rightarrow a + b = ۴$$

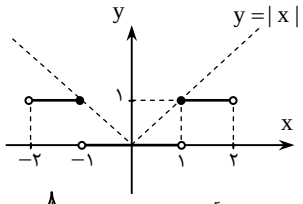
B **۶۳- گزینه‌ی (۳)** اگر قرار دهیم $g(x) = \sin^۳ x$، با توجه به دایره‌ی مثلثاتی داریم: $g(\pi) = ۰$ و برای $x \to \pi^-$ داریم: $g(x) \to ۰^+$ و برای $x \to \pi^+$ داریم: $g(x) \to ۰^-$، بنابراین تابع $f(x) = [g(x)]$ در نقطه‌ی $x = \pi$ از چپ پیوسته و مشتق‌پذیر است.

B **۶۴- گزینه‌ی (۳)** نمودار $y = x[\sin x]$ را در بازه‌ی $(-\pi, \frac{\pi}{۲})$ رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار در این بازه تابع پیوسته است، ولی در $x = ۰$ مشتق‌پذیر نیست.

B **۶۵- گزینه‌ی (۴)**



نمودار تابع را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار، $f(x)$ در نقطه‌ی $x = ۰$ پیوسته و مشتق‌پذیر است.

B **۶۶- گزینه‌ی (۴)** با توجه به فرض نتیجه می‌گیریم نقطه‌ی $x = ۰$ نقطه‌ی بازگشت تابع است و نمودار تابع در همسایگی آن به صورت می‌شود. در بین گزینه‌ها، گزینه‌ی ۴ چنین نموداری دارد.

C **۶۷- گزینه‌ی (۳)** با تجزیه‌ی عبارت زیر رادیکال ضابطه‌ی تابع را می‌توانیم به‌صورت $f(x) = \sqrt[۳]{(x-۱)^۲(x+۲)}$ بنویسیم. حال در نقطه‌ی $A(۱,۰)$ داریم:

$$f'_+(۱) = \lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}\times\sqrt[۳]{x+۲}}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt[۳]{x+۲}}{\sqrt[۳]{x-۱}} = \frac{\sqrt[۳]{۳}}{۰^+} = +\infty$$

به‌همین ترتیب به‌دست می‌آوریم: $f'_-(۱) = -\infty$، بنابراین با توجه به پیوستگی f در $x = ۱$، نقطه‌ی A نقطه‌ی بازگشت تابع است. به‌همین ترتیب نتیجه می‌گیریم: $f'_+(-۲) = f'_-(-۲) = +\infty$ و نقطه‌ی $B(-۲,۰)$، نقطه‌ی عطف قائم تابع می‌شود.

تذکّر: این‌گونه تست‌ها را با روش ساده‌تری نیز می‌توان حل کرد که بر اساس تحلیل رفتار نمودار تابع در همسایگی نقطه‌ی مورد نظر است. با این روش در فصل «کاربرد مشتق» آشنا خواهید شد.

A **۶۸- گزینه‌ی (۳)** ضابطه‌ی تابع را می‌توانیم به‌صورت $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)^2}$ بنویسیم. بنابراین تابع در $x=\pm 2$ مشتق‌ناپذیر است.

B **۶۹- گزینه‌ی(۱)** اولاً در $x=0$ تابع ناپیوسته و بنابراین مشتق‌ناپذیر است. ضابطه‌ی دوم در تمام نقاط $R-\{0\}$ (و در نتیجه برای $x<0$) مشتق‌پذیر است. ضابطه‌ی اول نیز یک تابع گویا است که در دامنه‌اش مشتق‌پذیر است. بنابراین فقط یک نقطه‌ی مشتق‌ناپذیری $(x=0)$ داریم.

B **۷۰- گزینه‌ی(۲)** ضابطه‌ی دوم در نقطه‌ی $x=0$ مشتق‌ناپذیر است که در محدوده‌ی تعریف ضابطه $(|x|>1)$ قرار ندارد. پس فقط باید نقاط مرزی $x=\pm 1$ را بررسی کنیم. در هر دوی این نقاط تابع پیوسته است، ولی مشتق‌پذیر نیست، زیرا:

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2 & |x|\le 1\\ x-1 & x>1\\ -x-1 & x<-1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-2x & |x|<1\\ 1 & x>1\\ -1 & x<-1\end{cases}\Rightarrow f'_+(1)=1\,,\ f'_-(1)=-2\,,\ f'_+(-1)=2\,,\ f'_-(-1)=-1$$

A **۷۱- گزینه‌ی (۲)** ضابطه‌ی اول در دو نقطه‌ی $x=\pm 1$ مشتق‌ناپذیر است که هر دو در محدوده‌ی $|x|\le 2$ قرار دارند. هم‌چنین تابع در نقاط مرزی $x=\pm 2$ ناپیوسته و بنابراین مشتق‌ناپذیر است. مثلاً برای $x=-2$ داریم:

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=|4-1|=3\ ,\quad \lim_{x\to(-2)^-} f(x)=-8-1=-9$$

B **۷۲- گزینه‌ی(۲)** ضابطه‌ی اول در نقطه‌ی $x=-1$ مشتق‌ناپذیر است که در محدوده‌ی $x<1$ قرار دارد. ضابطه‌ی دوم در نقطه‌ی $x=1$ مشتق‌ناپذیر است. در این نقطه تابع، ناپیوسته نیز است $(\lim_{x\to 1^+} f(x)=0\,,\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=-2)$، پس نقاط مشتق‌ناپذیری تابع عبارت‌اند از $x=\pm 1$.

B **۷۳- گزینه‌ی (۲)** اولاً در نقطه‌ی $x=0$ تابع ناپیوسته و بنابراین مشتق‌ناپذیر است $(\lim_{x\to 0^+} f(x)=-1\,,\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=4)$. ضابطه‌ی اول (برای $x>0$)، در $x=1$ به‌علت حضور $x-1$ مشتق‌ناپذیر است که در محدوده‌ی ضابطه قرار دارد. هم‌چنین در ضابطه‌ی دوم به‌علت حضور $x+1$، $x=-1$ ریشه‌ی ساده‌ی عبارت است که ضابطه در آن مشتق‌ناپذیر است. پس روی هم تابع در سه نقطه‌ی $x=0$ و $x=\pm 1$ مشتق‌پذیر نیست.

B **۷۴- گزینه‌ی (۲)** چون $x^3+2x^2+x=x(x+1)^2$، پس $x=-1$ ریشه‌ی مضاعف عبارت داخل قدر مطلق است و عبارت دوم تنها در نقطه‌ی $x=0$ مشتق‌ناپذیر است. ولی عبارت اول در نقطه‌ی $x=0$ مشتق‌پذیر است ($x=0$ ریشه‌ی مکرر x^3 است). پس مجموع دو عبارت در $x=0$ مشتق‌ناپذیر و زاویه‌دار است، و نقطه‌ی زاویه‌دار دیگری نداریم.

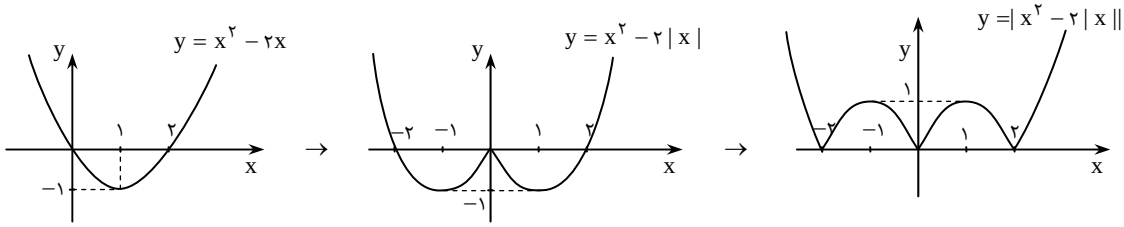
B **۷۵- گزینه‌ی (۱)** تابع $g(x)=x^3+x-1$ چند جمله‌ای درجه‌ی سوم است که چون $g'(x)=3x^2+1>0$، همواره اکیداً صعودی است و تنها یک ریشه‌ی ساده دارد. طبق نکات بخش آموزش $y=|g(x)|$ در این ریشه مشتق‌ناپذیر است.

C **۷۶- گزینه‌ی (۴)** باید $g(x)=x^3-2x^2+ax$ فقط یک ریشه‌ی ساده داشته باشد، زیرا ریشه‌های ساده‌ی g، نقاط زاویه‌دار f را مشخص می‌کنند. چون $g(x)=x(x^2-2x+a)$، پس $x=0$ ریشه‌ی g است و چون $a\ne 0$، $x=0$ ریشه‌ی ساده‌ی g است (زیرا دیگر ریشه‌ی x^2-2x+a نیست). پس باید عبارت x^2-2x+a دیگر ریشه‌ی ساده نداشته باشد، یعنی: $\Delta\le 0$، بنابراین: $4-4a\le 0\Rightarrow a\ge 1$.

D **۷۷- گزینه‌ی (۴)** تابع f باید در نقاط $x=\pm 1$ (ریشه‌های عبارت زیر رادیکال) مشتق‌پذیر باشد، پس باید زیر رادیکال با فرجه‌ی ۳، حداقل توان عوامل $(x-1)$ و $(x+1)$ برابر ۳ باشد، یعنی باید عبارت زیر رادیکال بر $(x-1)^3(x+1)^3$ بخش‌پذیر باشد، پس عبارت درجه‌ی چهار x^4+ax^2+bx+c همان $(x-1)^2(x+1)^2$ یا معادلاً $(x^2-1)^2=(x^4-2x^2+1)$ می‌باشد. ولی دقت کنید که در این صورت داریم:

$$f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^3|x+1|(x+1)^2}=\sqrt[3]{(x-1)^3(|x+1|)^3}=(x-1)|x+1|\to \text{در } x=-1 \text{ مشتق‌ناپذیر}$$

C **۷۸- گزینه‌ی (۳)** نمودار تابع را رسم می‌کنیم. از این‌که $|x|^2=x^2$ در رسم نمودار کمک گرفته‌ایم. با توجه به نمودار، تابع در ۳ نقطه به طول‌های $x=0$ و $x=\pm 2$ مشتق‌ناپذیر است.

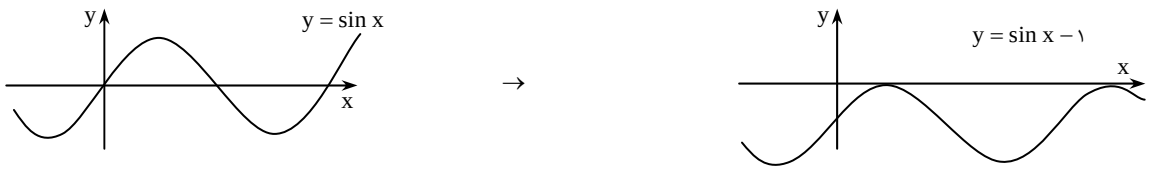


B **۷۹- گزینه‌ی (۲)** در تمام نقاطی که f ناپیوسته است، مشتق‌پذیر نیز نیست و در نقاط دیگر f مشتق‌پذیر است. بنابراین باید تعداد نقاطی را بیابیم که $\sqrt{5}x\in Z$:

$$0<x<4\Rightarrow 0<\sqrt{5}x<4\sqrt{5}\xrightarrow[8<4\sqrt{5}<9]{\sqrt{5}x\in Z}\sqrt{5}x\in\{1,2,\dots,8\}\to \text{۸ نقطه}$$

C **۸۰- گزینه‌ی(۴) راه اول:** تابع $y=|\sin x-1|$ در صورتی در نقطه‌ی $x=x_0$ مشتق‌ناپذیر است که x_0 ریشه‌ی ساده‌ی $g(x)=\sin x-1$ باشد. یعنی $g(x_0)=0$، ولی $g'(x_0)\neq 0$. در حالی‌که اگر $g(x_0)=0$ یا معادلاً $\sin x_0=1$، داریم: $g'(x_0)=\cos x_0=0$، بنابراین تابع اصلی در همه‌ی نقاط مشتق‌پذیر است.

راه دوم: با رسم نمودار تابع نیز می‌توانید به همین نتیجه برسید:



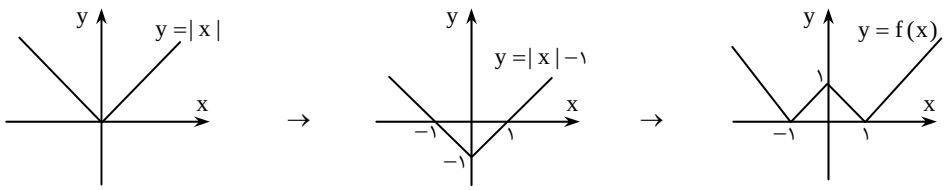
در تابع $y=\sin x-1$، نمودار بر محور x ها در بی‌شمار نقطه مماس است. در تابع $y=|\sin x-1|$، نمودار عیناً نسبت به محور x ها قرینه می‌شود که باز هم در هیچ نقطه‌ای زاویه‌دار یا مشتق‌ناپذیر نیست.

D **۸۱- گزینه‌ی (۳)** اولاً در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{2}$، تابع f تعریف نشده است (در واقع به دلیل حضور $\tan x$ و $\cot x$ در ضابطه‌ی آن، در تمام نقاط $x=\frac{k\pi}{2}$ که $k\in Z$، تابع f نامعین است)، پس به این نقطه کاری نداریم. حال اگر قرار دهیم $g(x)=\tan x-\cot x$، در نقاطی که $g(x)=0$، ولی $g'(x)\neq 0$، تابع $f(x)=|g(x)|$ مشتق‌ناپذیر است. داریم:

$$g(x)=0\Rightarrow \tan x=\cot x\Rightarrow \tan x=\frac{1}{\tan x}\Rightarrow \tan^2 x=1\Rightarrow \tan x=\pm 1\xrightarrow{x\in(0,\pi)} x_1=\frac{\pi}{4}\ ,\ x_2=\frac{3\pi}{4}$$

در هر دوی این نقاط داریم: $g'(x)=1+\tan^2 x+1+\cot^2 x\neq 0$، بنابراین در هر دو نقطه f مشتق‌ناپذیر است.

B **۸۲- گزینه‌ی(۴)** نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



از نمودار تابع مشخص است که سه نقطه‌ی زاویه‌دار (و بنابراین مشتق‌ناپذیر) وجود دارد.

B **۸۳- گزینه‌ی (۱)** ضابطه‌ی تابع را می‌توانیم به‌صورت $f(x)=x|x|$ نشان دهیم که به‌وضوح در $x=0$ پیوسته است. هم‌چنین تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است، زیرا:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}|x|=0\ ,\ f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x|x|-0}{x-0}=0$$

C **۸۴- گزینه‌ی (۱)** چون حد تابع $y=x^2$ تنها در نقطه‌ی $x=0$ برابر صفر (مقدار ضابطه‌ی دوم) می‌شود، پس تابع f تنها در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته است (برای توضیح بیش‌تر به تست‌های بخش پیوستگی مراجعه کنید). هم‌چنین با توجه به این‌که $f(0)=0$، داریم: $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ و چون مقدار این حد برای هر دو ضابطه‌ی $y_1=x^2$ و $y_2=0$ برابر صفر می‌شود، داریم: $f'(0)=0$.

B **۸۵- گزینه‌ی (۳)** چون $f(0)=0$ داریم:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{-\sqrt{x^2}}$$

دقت کنید که چون $x<0$، به جای x می‌توانیم $-\sqrt{x^2}$ قرار دهیم. حال داریم:

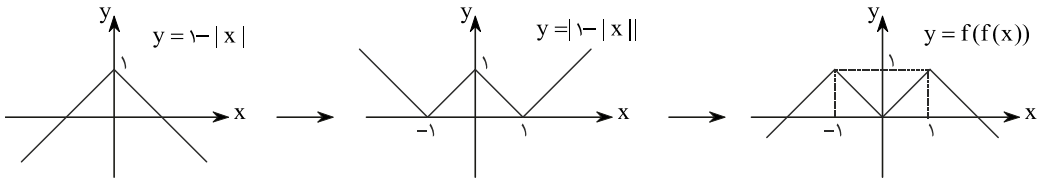
$$f'_-(0)=-\lim_{x\to 0^-}\sqrt{\frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}}=-\lim_{x\to 0^-}\sqrt{\frac{1-1+x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}}=-\lim_{x\to 0^-}\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

B **۸۶- گزینه‌ی (۳)** با توجه به ضابطه، نقطه‌ی مشتق‌ناپذیری تابع $x=0$ است. داریم:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1+x} & x\geq 0\\ \sqrt{1-x} & x\leq 0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\\ \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\end{cases}\qquad \begin{matrix}x>0\\ x<0\end{matrix}\xrightarrow{\text{پیوسته در } x=0\ f}\begin{cases}f'_+(0)=\frac{1}{2}\\ f'_-(0)=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow f'_+(0)-f'_-(0)=1$$

B **۸۷- گزینه‌ی (۴)** به دلیل حضور جزء صحیح‌ها در هر نقطه‌ای که تابع ناپیوسته باشد، مشتق‌ناپذیر است. یعنی باید نقاطی را بیابیم که $x \in Z$ یا $x+\frac{1}{3} \in Z$. در هر یک از این نقاط یکی از دو تابع $[x]$ و $[x+\frac{1}{3}]$ پیوسته و دیگری ناپیوسته است، بنابراین مجموع آن دو نیز ناپیوسته است. در بازه‌ی $(0,3)$ این نقاط عبارت‌اند از $\{\frac{2}{3},1,\frac{5}{3},2,\frac{8}{3}\}$.

B **۸۸- گزینه‌ی (۳)** داریم $f(f(x))=1-|1-|x||$، حال نمودار این تابع را رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودار، $y=f(f(x))$ در سه نقطه‌ی $x=0$ و $x=\pm 1$ مشتق‌ناپذیر است.

B **۸۹- گزینه‌ی (۴)** باید تابع در $x=1$ پیوسته باشد، بنابراین $a+b=2$. با این فرض داریم:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^{\frac{-1}{2}} & x\ge 1 \\ ax^2+bx & x<1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -x^{\frac{-3}{2}} & x>1 \\ 2ax+b & x<1 \end{cases} \xrightarrow{\text{پیوسته } f \text{ در } x=1} \begin{cases} f'_+(1)=-1 \\ f'_-(1)=2a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=-1 \\ a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=5 \end{cases}$$

C **۹۰- گزینه‌ی (۳)** می‌دانیم $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ در $x=1$ مقداری برابر صفر و برای $x\neq 1$ مقداری مثبت دارد، پس در $x=1$ می‌نیمم نسبی دارد و تابع $y=[f(x)]$ در این نقطه پیوسته و مشتق‌پذیر است. پس گزینه‌ی (۳) درست است. به دلیلی مشابه تابع گزینه‌ی (۱) در این نقطه ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. هم‌چنین برای تابع گزینه‌ی (۲) داریم:

$$y'|_{x=1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)[\sqrt[3]{x-1}]}{x-1}=\lim_{x\to 1}[\sqrt[3]{x-1}]$$

که حد آخر به‌دلیل این‌که در $x=1$ با می‌نیمم نسبی $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ سروکار نداریم، وجود ندارد (حدهای چپ و راست متفاوت‌اند). گزینه‌ی (۴) را نیز می‌توانید با استدلالی مشابه رد کنید.

B **۹۱- گزینه‌ی (۳)** با توجه به‌آن‌که $f(1)=1$، حاصل حد مورد نظر همان $f'_-(1)$ است. چون تابع f در $x=1$ پیوسته است، می‌توانیم $f'_-(1)$ را با مشتق گرفتن از ضابطه‌ی دوم تابع به‌دست آوریم:

$$f'_-(1)=4\times 1=4$$

C **۹۲- گزینه‌ی (۴)** داریم: $f(1)=3$ و $f(2)=1$، بنابراین اگر قرار دهیم $t=h^2$، آن‌گاه $t\to 0^+$ و داریم:

$$\text{جواب}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}+\lim_{t\to 0^+}\frac{f(2+t)-f(2)}{t}=f'_+(1)+f'_+(2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x\to 1^+ : x-1>0\ ,\ x-2<0 \Rightarrow f(x)=x-1-3(x-2) \Rightarrow f'_+(1)=1-3=-2 \\ x\to 2^+ : x-1>0\ ,\ x-2>0 \Rightarrow f(x)=x-1+3(x-2) \Rightarrow f'_+(2)=1+3=4 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} \text{جواب}=2$$

B **۹۳- گزینه‌ی (۲)** اگر قرار دهیم $t=-2\Delta x$، آن‌گاه $t\to 0^-$ و داریم:

$$\text{جواب}=\lim_{t\to 0^-}\frac{f(1+t)-f(1)}{-\frac{t}{2}}=-2\lim_{t\to 0^-}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}=-2f'_-(1)$$

در همسایگی کوچک چپ $x=1$، علامت $x-1$ منفی و علامت x مثبت است، بنابراین:

$$f(x)=\frac{1-x+1}{x+1}=\frac{-x+2}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{-3}{(x+1)^2}\Rightarrow -2f'_-(1)=-2\times\frac{-3}{4}=\frac{3}{2}$$

C **۹۴- گزینه‌ی (۴)** ضابطه‌ی تابع را به‌صورت $f(x)=g(x)[x]$ می‌نویسیم. برای پیوستگی تابع f در $x=2$، طبق نکته‌ی عامل صفر کننده باید $g(2)=0$. بنابراین $g(x)=(x-2)h(x)$ و داریم:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)h(x)[x]-0}{x-2}=\lim_{x\to 2}h(x)[x]$$

برای آن‌که حد بالا موجود باشد، باید $h(2)=0$، بنابراین $g(x)$ بر $(x-2)^2$ بخش‌پذیر است و در نتیجه $g(2)=g'(2)=0$. حال داریم:

$$\begin{cases} g(2)=0\Rightarrow 8+12+2a+b=0 \\ g'(2)=0\Rightarrow 12+12+a=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=-24 \\ b=28 \end{cases}\Rightarrow a+b=4$$